西　南　交　通　大　学
本科毕业设计 (论文)

紧群的表示
REPRESENTATIONS OF COMPACT GROUPS

年　　级: 2020 级

学　　号: 2020114728

姓　　名: 韦杰

专　　业: 数学与应用数学

指导教师: 杨中维

2024 年 5 月

西南交通大学
本科毕业设计 (论文)学术诚信申明

本人郑重声明: 所呈交的毕业设计 (论文), 是本人在导师的指导下, 独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外, 本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体, 均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名:

日期: 年 月 日

西南交通大学
本科毕业设计 (论文) 版权使用授权书

本毕业设计 (论文) 作者同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版, 允许论文被查阅和借阅。本人授权西南交通大学可以将本毕业设计 (论文) 的全部或部分内容编入有关数据库进行检索, 可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本毕业设计 (论文)。

保密 □, 在 ___ 年解密后适用本授权书。

本论文属于

不保密 □。

(请在以上方框内打"✓")

作者签名: 指导教师签名:

日期: 年 月 日 日期: 年 月 日

指导教师评语

院　　系 ________________________ 专　　业 ________________________

年　　级 ________________________ 姓　　名 ________________________

题　　目 ____

指导老师
评　　语____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

指导老师 __________(签章)

评阅人评语

院　　系 ________________________ 专　　业 ________________________

年　　级 ________________________ 姓　　名 ________________________

题　　目 ____

评 阅 人
评　　语____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

评阅人 __________(签章)

答辩成绩

院　　系 ________________________ 专　　业 ________________________

年　　级 ________________________ 姓　　名 ________________________

题　　目 ____

成　　绩 ____________________

答辩委员会主任 __________(签章)

年　　月　　日

毕业设计(论文)任务书

班　级 数学 2020-02 班 学生姓名 韦杰 学号 2020114728

发题时间: 2023 年 11 月 6 日 完成时间: 2024 年 5 月 4 日

题　目 紧群及其表示理论初探

1、本设计 (论文) 的目的、意义 紧群是一类重要的拓扑群. 通常, 人们可以将紧群看成是具有离散拓扑的有限群的自然推广. 迄今为止, 人们不仅对各类紧群的结构有比较全面的认识, 而且对于它们的表示理论也有深入的研究. 从分析的角度来看, 每个紧群都有一个 Haar 测度. Haar 测度不仅是研究紧群最核心的工具之一, 而且在抽象调和分析、数理统计中都有重要的运用. 从表示论的角度来看, 紧群的表示论理论是基于 Peter-Weyl 定理建立起来的. 由此定理进一步导出的 Weyl 特征标公式绝对称得上是 20 世纪最有影响力的结论之一.

本论文是一篇综述性论文, 旨在研究紧群上的 Haar 测度与及紧群的表示理论. 本论文从拓扑群、表示论中比较核心的研究领域出发, 涉及到经典理论的系统学习、特殊例子的具体计算. 这不仅综合考察了学生本科阶段所学的各类基础知识, 而且将引导本科生深入了解表示论这一重要数学分支. 通过完成本论文最终将进一步激发学生对基础数学深入研习的动力.

2. 学生应完成的任务 1. 查阅各类参考文献; 2. 理解并掌握紧群上 Haar 测度的构造、证明; 3. 掌握紧群的表示的基本概念、性质; 4. 掌握 Peter-Weyl 定理的证明; 5. 掌握一些特殊的紧群 (如: 正交群、辛群等) 的不可约表示.

3. 本设计 (论文) 与本专业的毕业要求达成度如何?(如在知识结构、能力结构、素质结构等方面有哪些有效的训练)

本论文从表示论中经典、核心的研究领域出发, 具体研究紧群上的 Haar 测度与紧群表示的 Peter-Weyl 定理. 这样安排, 一方面兼顾了基础数学方向的本科生的多门专业课程知识; 另一方面能够由浅入深, 从具体例子窥探当今表示论研究的前沿. 通过本论文可以综合掌握本科所学多门专业课程, 并能够为进一步的研究、学习做铺垫.

4、本设计 (论文) 各部分内容及时间分配:(共 17 周)

第一部分 查阅资料、拟定计划. (1-2 周)

第二部分 学习并补充拓扑群相关的基础知识. (3-5 周)

第三部分 掌握紧群上的 Haar 测度的存在性定理的证明. (6-9 周)

第四部分 掌握紧群的表示的 Peter-Weyl 定理. (10-14 周)

第五部分 具体研究一些特殊紧群的表示理论, 完成论文初稿 (15-16 周)

评阅及答辩 修改论文, 完成答辩. (17 周)

备　注

指导教师: 杨中维　2023 年 11 月 6 日

审 批 人: ______ 年 月 日

摘　　要

本文是一篇关于紧群表示论的综述性文章, 我们主要介绍了 Haar 测度, 以及借助它研究紧群在复数域上的酉表示问题. 特别的, 我们计算出了经典紧群 SU(2) 的表示.

在本文中, 我们首先对局部紧 Hausdorff 拓扑群建立了 Haar 测度, 讨论 Haar 测度的存在唯一性. 然后, 我们借助分析学上的工具讨论了紧群的酉表示, 给出了紧群中酉表示等价的充分必要条件, 详细阐述了紧群表示论中的 Schur 正交关系和 Peter-Weyl 定理, 将经典 Fourier 分析推广到了紧 Hausdorff 非交换群的情形, 为在拓扑群上做抽象调和分析的提供了基础框架. 特别的, 我们运用上述这些理论具体研究了典型紧群 SU(2) 的酉表示问题.

在本文最后, 我们指出了紧群表示与李群李代数、自守表示论、Langlands 纲领及物理等领域中的联系和应用, 对未来的学习和研究做了充分的分析和展望.

关键词: 紧群的表示; 不可约酉表示; 特征标; Peter-Weyl 定理; Haar 测度

Abstract

In this paper, the representation theory of compact groups is reviewed by us. We give a concise introduction to the Haar measure of locally compact Hausdorff groups and apply it to to study the unitary representations of compact groups over complex fields. In particular, we calculate detailedly the irreducible representations of the classical group SU(2).

To begin with, we establish the Haar measure for locally compact Hausdorff groups and discuss the existence and uniqueness of the Haar measure. After that, with the development of analytical tools mentioned above, we describe clearly when any two unitary representations of compact groups are equivalent and elaborate on the Schur orthogonality relations and Peter-Weyl theorem, which extends the typical Fourier analysis to the case of compact Hausdorff nonabelian groups and provides a basic framework for abstract harmonic analysis on topological groups. Especially, these theories are made full use of constructing and solving the unitary representation problem of classical compact groups SU(2).

At the end of this paper, we pointed out that the representation theory of compact group are closely related to other mathematical and physical fields, such as Lie group, Lie algebra, automorphic representation theory, Langlands programme, quantum mechanic and so on. Moreover, it is clearly that what we can prepare to do further study and research in the future.

Key words: representations of compact group; irreducible unitary representations; character; Peter-Weyl theorem; Haar measure

目录

正文前为奇数页，此页为白页，
正文前为偶数页，此页不要.

第 1 章　绪论

我们将在这一章简要介绍拓扑群的历史背景 [1], 拓扑群的基本概念与性质, 以及它与其他数学、物理分支的联系 [2]. 群论是一门古老的数学分支, 其中有限群的表示已有一套有力的研究工具, 并且取得了非常丰富的成果[22][27]. 作为有限性条件的推广, 考虑紧致拓扑群的表示是自然的问题. 对于一般拓扑群而言, 其结构是非常复杂的, 故我们对群运算提出一些条件, 如交换性. 局部紧致交换拓扑群是我们研究的重点对象, 对于一般局部紧致拓扑群的表示理论, 读者可参考 [21][26].

1.1　引言

拓扑群是带有拓扑结构的群, 它的群运算在拓扑意义下是连续的, 反映对称性下的某种连续不变性. 拓扑群在数学, 物理, 化学, 生命科学, 工程设计及医学等理工科中广泛存在和应用. 譬如, 拓扑群是描述杨振宁先生提出的规范场论的基本语言; 拓扑群上的调和分析是通讯中调和分析的基本范例. 此外, 拓扑群和数学的其他分支更是联系紧密: 1. 拓扑群和李群联系紧密, 著名的 Hilbert 第五问题[24] 讨论一个拓扑群在什么条件下会是李群, 该问题在 1952 年得到解决, 其中数理逻辑中的模型论起到了连接桥梁的作用. 2. 拓扑群的表示是学习和研究自守表示和模形式的基础, 模形式理论和自守表示的在数论中的威力是巨大的. 读者可参考 [34]. 3. 拓扑群在齐性空间上的调和分析在齐性偏微分方程理论中也非常有力, 这是李群表示论的中心方法, 读者可参考 [15].

在分析学中, 研究一个对象可以考虑它上的函数, 从函数的性质重塑该对象, 这本质上是表示论的思想. 对于一个拓扑群 G 而言, 我们希望了解它的结构, 这可以从拓扑群上的连续函数出发, 这是拓扑结构带来的好处. 特别的, 我们考虑 G 上连续泛函 $f : G \mapsto \mathbb{C}$. 著名拓扑学家曾指出, 拓扑是用来描述逼近现象的. 有了逼近的语言, 我们希望对 f 在 G 上建立积分. 类似实分析中 Lebesgue 积分的建立过程, 我们首先需要对集合大小进行合理的度量. 也就是说, 在 G 上建立一个测度是必要的, 考虑到群运算与积分的相容性, 我们要求测度具有某种” 不变性”. 对于局部紧致的拓扑群, 我们有著名的 Haar 测度. 我们将在第二章中给出 Haar 测度的定义, 并给出相关构造.

一般拓扑群的表示是无穷维的, 借助拓扑线性空间的语言在所难免 (通常表示空间是 Hilbert 空间). 研究紧群的表示, 我们需要用到分析中的许多工具, 尤其是 Fourier 分析. 为此, 我们需要将实数上的一些基本事实推广到局部紧致交换拓扑群中. 在紧群的表示中, 一个重要的结果是 Peter—Weyl 定理, 我们将在第三章中详细叙述. Peter—Weyl 定理是 Fourier 分析理论在局部紧 Hausdorff 非交换群上的推广.

[1] 拓扑群的存在是自然的. 实数域 $\mathbb{R}$ 便是一个局部紧致交换拓扑群! 了解以下两个实数域 $\mathbb{R}$ 拓扑群结构的事实对于认识拓扑群的重要性是有帮助的: 1. 实数集上的函数连续性依赖于拓扑, 函数周期性依赖于群运算. 正是得益于实数域 $\mathbb{R}$ 的拓扑群结构, 我们才得以在实数域 $\mathbb{R}$ 上定义 Fourier 级数. 在现代工程和医学当中, Fourier 分析已经成为不可或缺的工具. 2. 在著名的布尔巴基 (Bourbaki) 学派开展公理化数学运动中, 布尔巴基学派从拓扑群出发构造实数域, 将分析学建立在拓扑群理论上.

[2] Andrew Wiles 在证明著名的费马大定理时, 使用到了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的 Fourier 分析这一强有力技术; Gell-Mann 获得诺贝尔物理学奖的基本粒子研究工作中, 也用到了拓扑群 SU(3) 的表示理论.

同时, 我们还对局部紧 Hausdorff 非交换群给出了著名的 Plancherel 公式. 最后, 我们以紧致李群 SU(2) 为例, 利用紧群表示论的技术和结果, 构造并计算出 SU(2) 的所有不可约酉表示. 另外, 表示论中一个重要问题是, 如何从一个表示出发再构造原对象. 对拓扑群而言, 我们会问如何从一个群 G 的表示重塑 G. 这是日本数学家淡中忠郎 (Tannaka) 提出的问题, 称为淡中对偶, 读者可参考 [19], 我们不在文章中过多阐述.

本文将对局部紧致 Hausdorff 拓扑群建立 Haar 测度, 将实分析中的基本结果推广到局部紧致 Hausdorff 拓扑群上. 用 Haar 测度和 Haar 积分等分析学上的工具, 开展紧群表示的研究. 将有限群常表示论中的 Schur 正交关系推广到了紧群的表示, 讨论了紧群表示中著名的 Peter—Weyl 定理, 将经典 Fourier 分析推广到了局部紧致非交换情形. 最后, 我们以紧致李群 SU(2) 为例, 利用紧群表示中的 Schur 正交关系和 Peter—Weyl 定理, 计算它的不可约表示和特征标. 其中, 有经典定理的证明, 也有对前沿问题的展望, 具有一定的理论价值.

1.2 预备知识

我们首先给出文章中需要用到的基本概念和事实, 有关这些概念更详细的内容可参考抽象代数[9] 和点集拓扑学[19] 相关教材.

1.2.1 群

群是一种描述对称性的数学对象.

定义 1.1. *称集合 G 是一个群, 如果存在定义在 G 上的一个二元运算[3]:*

$$G \times G \mapsto G$$
$$(a, b) \mapsto ab$$

满足以下三条性质:

(1) 对任意的 $a, b, c \in G$, 满足结合律: $(ab)c{=}a(bc)$.

(2) 存在单位元 $e \in G$, 对任意的 $a \in G$, 有 $ea = ae = a$.

(3) 对任意的 $a \in G$, 存在 $b \in G$, 使得 $ab = ba = e$.

特别的, 如果上述运算满足交换性, 即对任意的 $a, b \in G$, 有 $ab = ba$, 则称群 G 是一个交换群.

通常, 我们考虑数学对象内部的两种结构: 子结构和商结构. 对于群也类似.

定义 1.2. *G 是一个群, H 是 G 的子集, 称 H 为 G 的子群, 如果 H 关于 G 的运算也构成群. 称子群 H 是 G 的正规子群, 如果对任意的 $a \in G$ 满足:*

$$aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid n \in N\} = N$$

[3]在本文中, 不加说明的情况下, 我们默认群的运算为乘法运算.

设 H 是群 G 的一个正规子群, 则我们可以构造商群[4]. 令 $G/H = \{aH \mid a \in G\}$, 定义运算:

$$G/H \times G/H \mapsto G/H$$
$$(aH, bH) \mapsto abH$$

可以验证, 上述运算是良定义的. 集合 G/H 关于上述运算构成一个群, 称为 G 关于 H 的商群.

研究一个数学结构, 我们希望把它做成一个范畴[5]. 现在, 我们把群做成一个范畴. 为此, 定义群之间的态射 (群同态), 以及同态之间的复合是必要的. 此外, 在群范畴中定义核和像也是自然的. 这里不再赘述, 具体详见 [30].

在数学结构中, 我们希望通过已知的对象, 去构造一个更大的数学对象. 乘积是一般的构造方法. 现在, 我们在群范畴之中给出定义.

定义 1.3. *I 是一个指标集, $\{G_i\}_{i\in I}$ 是一簇群, 现在考虑它们的直积:*

$$G = \prod_{i\in I} G_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in G_i\}$$

其中, G 的运算是逐点定义的, 求积和求逆运算都按分量进行. 称 G 是群簇 $\{G_i\}_{i\in I}$ 的直积.

1.2.2 拓扑空间

下面, 我们介绍拓扑的基本概念. 拓扑是一种描述逼近现象的有力语言. 历史上, 对于拓扑的定义经历了反复的修正, 最后给出了开集的公理化定义[23].

定义 1.4. *X 是一个集合, 称子集族 $\mathcal{F}$ 为集 X 上的一个拓扑[6], 如果 $\mathcal{F}$ 满足以下三条公理:*

(1) $\phi \in \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$.

(2) 任给 $U, V \in \mathcal{F}$, 我们有 $U \cap V \in \mathcal{F}$.

(3) 任给 $\mathcal{F}$ 的子簇 $\{U_i \mid i \in I\}$, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{F}$.

序对 $(X, \mathcal{F})$ 称为一个拓扑空间; 拓扑 $\mathcal{F}$ 中的元素称为拓扑空间 X 的开集. 称开集在 X 中的补集为闭集. 设 $A \subseteq X$, 称包含 A 的最小闭集为 A 的闭包, 记为 $\overline{A}$. 对 $x \in X$, 称集合 U 为点 x 的邻域, 如果存在开集 V, 使得 $x \in V \subseteq U$. 特别的, 每个包含 x 的开集都是 x 的邻域.

下面, 我们考虑不同拓扑空间之间的态射: 连续映射.

---

[4] 商群的构造, 必须要求子群 H 是正规的, 这是因为正规性确定了 G 上的一个等价关系[30].

[5] 范畴论是现代数学不可或缺的语言, 它致力于抓住各种 “数学结构” 中的共同特性, 并在保持这些结构上函数关系的基础上, 将这些结构联系起来. 关于范畴的学习可参见文献 [12].

[6] 拓扑在历史上有四种等价定义, 可以从开集, 闭集, 邻域和闭包出发分别确定拓扑. 这里我们采用通常的开集公理.

定义 1.5. 设 X_1, X_2 为两个拓扑空间, 称映射 $f: X_1 \mapsto X_2$ 是连续的 [7], 如果对任意 X_2 中的开集 U, $f^{-1}(U)$ 是 X_1 中的开集. 特别的, 如果 f 是双射, 且 f^{-1} 也连续, 则称 f 是一个同胚, 此时, 称拓扑空间 X_1 与 X_2 同胚. 称映射 f 是开映射, 如果对 X_1 中的开集 U, $f(U)$ 是 X_2 的开集.

下面, 我们给出拓扑空间的子空间, 商空间, 以及乘积空间的定义.

定义 1.6. $(X, \mathcal{F})$ 是一个拓扑空间, 对于 X 的任意子集 Y, 在 Y 上存在诱导拓扑使得 Y 成为拓扑空间. 令

$$\mathcal{F}|_Y = \{U \subseteq Y \mid 存在 V \in \mathcal{F}, 使得 U = V \cap Y\}$$

可以验证 $(Y, \mathcal{F}|_Y)$ 构成一个拓扑空间, 称为 X 的子空间. 设 $\sim$ 是 X 上的一个等价关系, $X/\sim$ 是等价类构成的集合, 则存在自然的映射 $\pi: X \mapsto X/\sim$. 在 $X/\sim$ 上定义拓扑, 使得该拓扑是使 π 成为连续映射的最强拓扑, 即 U 是 $X/\sim$ 中的开集, 当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 是 X 中的开集. 称此拓扑为商集 $X/\sim$ 的商拓扑, $X/\sim$ 构成一个商空间. 设 I 是一个指标集, $\{(X_i, \mathcal{F}_i)\}_{i\in I}$ 是一簇拓扑空间, 令

$$X = \prod_{i\in I} X_i$$

在 X 上赋予拓扑 $\mathcal{F} = \{U = \prod\limits_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{F}_i, 其中只有有限多个 U_i \neq X_i\}$. 称 $\mathcal{F}$ 为乘积拓扑, $(X, \mathcal{F})$ 构成一个拓扑空间.

连通性, 分离性, 可分性和紧致性是拓扑空间的四个基本性质, 下面我们简单介绍本文中需要用到的紧致性和分离性, 希望看到更多内容可参考 [32].

定义 1.7. X 是一个拓扑空间, 称 X 是 T_2 的 *(Hausdorff)*, 如果对 X 中任意不同的两点 x, y, 存在各自的邻域 U, V, 其中 $x \in U, y \in V$, 使得 $U \cap V = \phi$.

定义 1.8. 称一个拓扑空间 X 是紧致的[8], 如果对 X 的任意开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$, $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, 存在有限子覆盖. 称拓扑空间 X 是局部紧致的, 如果对任意的 $X \in X$, 存在 x 的一个紧致邻域.

下面, 我们不加证明的给出紧致性和分离性的重要性质, 相关证明可参考 [32].

性质 1.9. 设 I 是指标集, $\{X_i\}_{i\in I}$ 是一簇拓扑空间, $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$.

(1) X 是紧致的, 当且仅当对任意 $i \in I$, X_i 是紧致的.

(2) X 是局部紧致的, 当且仅当对任意 $i \in I$, X_i 局部紧致, 除有限多个 X_i 外 X_i 是紧致的.

[7] 关于连续映射的等价刻画, 可参考 [[32], 第二章].

[8] 在不同情况下, 我们有不同的紧性. 在几何中常考虑仿紧, 拟紧; 分析中常考虑列紧, 序列紧. 它们在 T_4 拓扑空间下都是等价的.

(3) (局部) 紧致空间的闭子集是 (局部) 紧致的.

(4) Hausdorff 空间的紧子集是闭集.

(5) 紧致空间在连续映射下的像也是紧致的.

(6) 紧致的拓扑空间, 都是局部紧致的.

(7) M *是拓扑空间,* $\{M_i\}_{i\in I}$ *是* M *的一个非空子集簇.* M *是紧致的, 当且仅当, 如果满足: 对任意的* M_i, M_j*, 存在* M_k*, 使得* $M_k \subseteq M_i \cap M_j$*, 则存在* $x \in M$*, 使得* $x \in \cap_{i\in I}\overline{M_i}$*.*

第 2 章　拓扑群及其齐性

下面我们给出拓扑群的定义, 我们已经在绪论(1)中指出, 它不是一个不自然的数学对象.

2.1　拓扑群

定义 2.1. *称群 G 是一个拓扑群, 如果 G 同时是一个拓扑空间, 并且拓扑结构与群结构相容. 即群的乘法运算 u:*

$$G \times G \mapsto G$$
$$u : (x, y) \mapsto xy$$

与群的求逆运算 v:

$$G \mapsto G$$
$$v : x \mapsto x^{-1}$$

是连续映射.

下面的群都是拓扑群.

例 2.2. *$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 关于加法和通常距离下诱导的拓扑构成一个拓扑群.*

例 2.3. *在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上引入 p-adic 拓扑, 它是由 p-adic 赋值所诱导. 设 p 是一个素数, 定义赋值映射[9]:*

$$v_p : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$$
$$x = p^r \frac{m}{n} \mapsto v_p(x) = p^{-r}$$

其中 $\gcd(p, mn) = 1$. 赋值映射 v_p 诱导 p-adic 距离[10] $d(x, y) = v_p(x - y)$, 从而诱导拓扑, 称为 p-adic 拓扑. $\mathbb{Q}$ 关于加法 (或乘法) 和 p-adic 拓扑构成拓扑群.

例 2.4. *一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \det(A) \neq 0\}$ 是一个拓扑群. 其上拓扑是将每个元素视为欧式空间 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的元素后所诱导的子拓扑. 类似的, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 也是拓扑群. 特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \det(A) = 1\}$ 也是拓扑群. 正交群 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, A^T A = E_n\}$ 也是拓扑群.*

设 I 是一个指标集, $\{G_i\}_{i\in I}$ 是一簇拓扑群. 作乘积 $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$. 则 G 上同时存在群结构和拓扑结构. 事实上, 这两个结构是相容的, G 构成一个拓扑群.

例 2.5. *n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 关于通常的向量加法和欧式拓扑构成一个拓扑群.*

事实上, 以上各例绝大多数都是局部紧致的拓扑群. 验证拓扑群是局部紧致是相对容易的, 这得益于拓扑群的齐性(2.2), 我们只需要在单位元处找到紧致邻域即可.

[9] 赋值映射的应用和性质可参考 [1].

[10] p-adic 距离在代数群的表示, 自守表示和数论等方向广泛应用.

定义 2.6. G, H 是两个拓扑群, 若映射 $f: G \mapsto H$ 既是群同态, 也是连续映射, 则称 f 为连续同态. 若 f 是双射, 且 f^{-1} 也是连续同态[11], 则称 f 为一个同构, 此时称拓扑群 G, H 同构.

例 2.7. 二阶特殊正交群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$ 同构于一维球面 S^1. 同构为:

$$\varphi: \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$$

类似群同态定理, 对于拓扑群, 我们也有类似结果, 但对态射要求更加严格.

定理 2.8. G_1, G_2 是两个拓扑群, $\varphi: G_1 \mapsto G_2$ 是开映射、连续同态, $\ker(\varphi)$ 是 G_1 的正规子群, 从而也是拓扑群. 于是, 存在拓扑群同构 $\varphi^*: G/\ker(\varphi) \mapsto \mathrm{Im}(\varphi)$. 且满足泛性质, $\varphi = \varphi^* \circ \rho$, 其中 $\rho: G \mapsto G/\ker(\varphi)$ 是商映射.

例 2.9. 存在拓扑群同构: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. 考虑映射:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{C}^* \\ t &\mapsto \exp(2\pi i t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t) \end{aligned}$$

容易验证, φ 是一个连续开映射, 且保持乘法运算. $\ker(\varphi) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = S^1$. 根据定理(2.8), 存在拓扑群同构 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

例 2.10. 存在拓扑群同构: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$. 考虑行列式映射:

$$\begin{aligned} \psi: \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &\mapsto \mathbb{R}^* \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

易知 ψ 是开的, 连续满同态. $\ker(\psi) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. 故存在拓扑群同构: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$.

2.2 拓扑群的齐性

拓扑空间的齐性, 是指每一个点处的拓扑性质都是一样的, 没有任何差别. 下面, 我们给出齐性空间的概念.

定义 2.11. 称拓扑空间 X 是一个齐性空间, 如果对任意的 $a, b \in X$, 存在 X 的同胚映射 $f: X \mapsto X$, 使得 $f(a) = b$.

性质 2.12. 拓扑群是齐性空间.

[11] 群同态的逆也是群同态, 这是自然的. 但对拓扑空间的连续映射, 其逆映射一般不是连续的.

证明. G 是一个拓扑群, 对任意的 $s \in G$, 考虑左乘映射:

$$\begin{aligned}\varphi_s : G &\mapsto G \\ x &\mapsto sx\end{aligned}$$

φ_s 是连续的. 考虑如下的两个连续映射 u, v :

$$\begin{aligned} G \overset{u}{\mapsto} G \times G &\quad \overset{v}{\mapsto} G \\ x \mapsto (s, x) &\quad \mapsto sx \end{aligned}$$

于是, $r_s = v \circ u$ 也是连续的. 同时, 左乘映射是双射, $r_s^{-1} = r_{s^{-1}}$. 从而 r_s^{-1} 也连续. 于是 r_s 是一个同胚. 对任意的 $a, b \in G$, 取上述 $s = ba^{-1}$, 于是 $r_s(a) = b$. 拓扑群是齐性的. □

2.3 拓扑群的子群和商群

下面, 讨论拓扑群的子结构和商结构.

定义 2.13. *G 是一个拓扑群, G 的任意子群关于诱导子拓扑构成一个拓扑群.*

于是, $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Z}$ 都是 $\mathbb{R}$ 关于加法的子拓扑群, 特别的, $\mathbb{Z}$ 上的拓扑是离散拓扑. 任意群上赋予离散拓扑都构成一个拓扑群.

例 2.14. *$\mathbb{C}^*$ 关于复数的乘法构成一个群. 一维球面 $S^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid\, \mid x \mid = 1\} \subseteq \mathbb{C}^*$, 从而 S^1 是拓扑群.*

下面, 我们不加证明的给出拓扑群子群的一些拓扑性质.

记号 2.15. *$(G, \cdot)$ 为群, A, B 是 G 的子集. $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$.*

性质 2.16. *G 是一个拓扑群. 设 A, B 是 G 的子集, H 是 G 的子群, $x \in G$.*

(1) 若 A 是开集 (闭集), 则 xA 和 Ax 都是开集 (闭集).

(2) 若 A 是开集, 则 AB 和 BA 是开集.

(3) A 是闭集, B 有限, 则 AB 和 BA 是闭集.

(4) A, B 是紧集, 则 AB 都是紧集.

(5) G 的每个开子群同时也是闭的. 每个有限指数的闭子群, 同时也是开的.

(6) G 是 (局部) 紧群, H 是闭子群, 则 H 是 (局部) 紧群.

(7) G 是局部紧致的, 当且仅当 G 的单位元 e 处存在紧致邻域.

(8) G 是 Hausdorff 的, 则 H 是 Hausdorff 的.

例 2.17. 拓扑群 $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ 是 *Hausdorff* 的, 一维球面 S^1 是其子群, 则 S^1 是 *Hausdorff* 的.

下面, 我们给出拓扑群商群的定义, 以及不加证明给出它的一些拓扑性质.

性质 2.18. G 是一个拓扑群, H 是 G 的子群, G/H 是 G 相对于 H 的左陪集拓扑空间. $\rho : G \mapsto G/H$ 是商映射. G/H 中集合 V 是开集, 当且仅当 $\rho^{-1}(V)$ 是 G 中开集. 以下成立:

(1) 商映射 ρ 是开映射.

(2) 若 H 是开子群, 当且仅当 G/H 是离散拓扑空间.

(3) 若 G 为 *(*局部*)* 紧群, 则 G/H 为 *(*局部*)* 紧致子空间.

(4) 若子群 H 和商空间 G/H 是 *(*局部*)* 紧致的, 则 G 也是 *(*局部*)* 紧致的.

(5) G/H 是 *Hausdorff* 的空间, 当且仅当 H 是闭子群.

(6) H 和 G/H 是 *Hausdorff* 的, 则 G 是 *Hausdorff* 的.

(7) 特别的, 若 H 是正规子群, 则 G/H 是一个拓扑群.

例 2.19. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 关于实数加法和通常拓扑是一个拓扑群, 但不是 *Hausdorff* 的, 这是因为有理数 $\mathbb{Q}$ 关于加法和通常拓扑构成的拓扑群在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 从而非闭集, 由(2.18).

2.4 拓扑变换群

在本文后续提到相对不变测度时, 我们需要借助拓扑群的群作用的语言. 这本质上也是一种表示, 在有限群的情形称为置换表示, 它可以视为某种特殊的线性表示.

定义 2.20. G 是一个拓扑群, M 是一个拓扑空间, 称拓扑群 G 在拓扑空间 M 上存在一个左作用[12], 如果存在连续映射:

$$\begin{aligned} G \times M &\mapsto M \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

使得以下两条成立:

(1) 对任意的 $g_1, g_2 \in G, x \in M$, 有 $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$.

(2) 对于 G 的乘法单位元 e, 对任意的 $x \in M$, 成立 $ex = x$.

称 G 是 M 的拓扑变换群. 称 M 是相对于 G 的拓扑齐性空间, 如果对任意的 $x \in M$, 如下映射 π_x 是连续、满的:

$$\begin{aligned} \pi_x : G &\mapsto M \\ g &\mapsto gx \end{aligned}$$

[12]类似我们可以定义右作用.

容易验证, M 是相对于 G 的拓扑齐性空间, 则 G 在 M 上的群作用只有一条轨道, 是传递的[13]. π_x 未必是单射, 从而关于 x 的稳定子群 $G_x = \pi_x^{-1}(x) = \{s \in G \mid sx = x\}$ 并不总是平凡的. 特别的, 如果 M 是 *Hausdorff* 的, 则 G_x 是闭集.

例 2.21. *G 是一个拓扑群, H 是 G 的子群.*

(1) $M = G$ 是相对于 G 的拓扑齐性空间.

(2) $M = G/H$ 是相对于 G 的拓扑齐性空间.

类似于群论中的群作用等价定理, 即作用集合可用群重造. 我们对拓扑群也有类似结果:

定理 2.22. *拓扑空间 M 是 Hausdorff 的, M 是关于拓扑群 G 的齐性空间, $x \in M$, 则存在如下拓扑空间的同胚:*

$$\begin{aligned}\varphi : G/G_x &\mapsto M\\ gG_x &\mapsto gx\end{aligned}$$

特别的, 当 G 是紧群时, M 与 G/G_x 也同胚.

[13] 关于群作用性质, 可参考 [29].

第 3 章　拓扑群上的 Haar 测度

本章我们指出, 对每个局部紧致的 Hausdorff 拓扑空间, 其上存在一个自然的 Borel 测度[14]. 基于这个事实, 我们对于局部紧致的拓扑群, 我们考虑其上 Borel 测度 u 与群运算的关系. 换句话说, E 是局部紧致拓扑群 G 上的一个可测子集, 为了使得群结构与测度相容, 我们希望测度在群运算下不变, 即 $u(gE)=u(E)$, 对任意的 $g \in G$ 成立. 我们称拓扑群上的这种测度具有" 不变性".

3.1　不变测度

定义 3.1. *设 X 是一个拓扑空间, f 是 X 上的复值函数. 函数 f 的支撑集为如下集合的闭包:*

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

记 f 的支撑集为 $\operatorname{supp}(f)$. 记 X 上支撑集为紧集的连续复值函数的全体为 $\mathrm{C}_c(X)$, 即:

$$\mathrm{C}_c(X)=\{f: X \mapsto \mathbb{C} \mid f\text{连续}, \operatorname{supp}(f)\text{是}X\text{的紧集}\}$$

X 是一个拓扑空间, $\mathrm{C}_c(X)$ 关于点态加法和数乘构成一个复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 下面, 我们指出当 X 是局部紧致的 Hausdorff 拓扑空间时, $\mathrm{C}_c(X)$ 非空.

引理 3.2 (**Urysohn 引理**)**.** *设 X 是局部紧致的 Hausdorff 拓扑空间, V 是 X 中的开集, K 是 X 的紧集, 且 $K \subseteq V$, 则存在 $f \in \mathrm{C}_c(X)$, 使得满足如下性质:*

(1) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, *对任意的 $x \in X$ 成立.*

(2) $f(x)=1$. *对任意的 $x \in K$ 成立.*

(3) $f(x)=0$, *对任意的 $x \notin V$ 成立.*

(4) $\operatorname{supp}(f) \subseteq V$.

根据 Urysohn 引理(3.2), 对局部紧致 Hausdorff 的非空拓扑空间 X 中的任意紧致集合 K, 只要 K 不是空集, 则存在非零函数 $f \in \mathrm{C}_c(X)$, 使得 $\operatorname{supp}(f) \subseteq K$. 我们定义如下集合:

$$\mathrm{C}_c(X, K)=\{f \in \mathrm{C}_c(K) \mid \operatorname{supp}(f) \subseteq K\}$$

$\mathrm{C}_c(X, K)$ 是 $\mathrm{C}_c(X)$ 的子空间. 得易于 K 的紧性, 我们可以在 $\mathrm{C}_c(X, K)$ 定义一个范数[15]; 设 $f \in \mathrm{C}_c(X, K)$, 定义:

$$\|f\|_K=\sup_{x \in K}|f(x)|$$

[14] 专门的抽象测度论, 读者可参考书籍 [13].

[15] 范数, 赋范线性空间, Banach 空间的概念可参考分析学相关书籍 [28].

$\mathrm{C}_c(X,K)$ 关于上述范数构成一个完备的赋范线性空间[28], 即 Banach 空间. 下面我们给两个后文构造 Haar 测度常用的集合:

$$\mathrm{C}_c^+(X) = \{f \in \mathrm{C}_c(X) \mid f \geqslant 0, f\text{不恒为}0\}$$

$$C_c^+(X,K) = \{f \in \mathrm{C}_c^+(X) \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq K\}$$

下面, 我们从函数层的角度来定义局部紧致 Hausdorff 空间的测度, 有的文献也称本文的测度为分布. 可以证明这样定义的测度与一般抽象测度是一回事. Riesz 表示定理揭示了两者的关系, 具体可见 [第二章,[28]].

定义 3.3. *X 是局部紧致的 Hausdorff 空间, 称线性泛函 $u : \mathrm{C}_c(X) \mapsto C$ 是一个正测度, 如果对 $f \geqslant 0$, 始终成立 $u(f) \geqslant 0$.*

定义 3.4. *X 是局部紧的 Hausdorff 空间, $u : \mathrm{C}_c(X) \mapsto \mathbb{C}$ 是线性泛函, 称 u 为 X 上的复测度*[16]*, 如果对任意的紧集 $K \subseteq X$, 存在非负实数 a_K, 使得对任意的 $f \in \mathrm{C}_c(X,K)$, 我们有 $\mid u(f) \mid \leqslant a_K \parallel f \parallel_K$. 换句话说, u 是 X 的任意紧集上的有界线性泛函.*

例 3.5. *X 是局部紧的 Hausdorff 空间, 定义映射 $\epsilon_x : f \mapsto f(x)$. 连续函数在紧集上可以取得最大值, 故 ϵ_x 是 X 的一个测度. 称 ϵ_x 为 Dirac 测度.*

下面, 我们不加证明的指出, 局部紧致 Hausdorff 空间上的测度延拓定理.

定理 3.6. *X 是局部紧的 Hausdorff 空间, u 是定义在 $\mathrm{C}_c^+(X)$ 上的线性泛函, 则 u 可以唯一延拓成为 X 的复测度.*

下面, 我们聚焦于局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 讨论其上的不变测度. 其中, 拓扑变换群的观点是贯彻始终的. 设 G 为一个局部紧致的拓扑群, 我们通过如下作用将 $\mathrm{C}_c(G)$ 视为 G 的拓扑齐性空间.

$$G \times \mathrm{C}_c(G) \mapsto \mathrm{C}_c(G)$$
$$(s, f(x)) \mapsto s.f(x) = f(s^{-1}x)$$

称上述群作用为 f 的左平移.

定义 3.7. *G 是一个局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 称一个正测度 u 为 (左)Haar 测度*[17]*, 如果 u 在左平移下不变. 即对任意的 $s \in G$, 任意的 $f \in \mathrm{C}_c(G)$, 有 $u(f) = u(sf)$. 有时, 我们也称 u 是 G 上的一个 (左) 不变测度, 或者 (左)Haar 积分.*

3.2 Harr 测度

历史上, Harr 测度的构造有很多种办法. 其中, 最为经典的两种由 A.Weil 和 H.Cartan 分别给出. 本节将追溯 A.Weil 的办法, 在局部紧致的 Hausdorff 群上构造 Harr 积分, 并简要说明 Haar 积分的唯一性.

[16]我们有时称 $u(f)$ 是 f 在 X 上相对于 u 的积分, 记为 $\int_X f(x)du(x)$.

[17]对于右平移, 也可类似定义右 Haar 测度.

下面, 我们先给出本章最重要的定理.

定理 3.8 (Haar). *G 是一个局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 则 G 上存在一个左 Haar 测度 u. 在相差一个正实数因子的意义下, u 是由拓扑群 G 唯一决定的.*

3.2.1 Haar 测度的存在性

下面, 我们指出构造 Harr 测度的大体思路. G 是一个局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 我们只需要在 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 上建立一个正测度 u, 并说明正测度 u 的唯一性. 这是得益于定理(3.6), 我们可以将 u 唯一延拓为 $\mathrm{C}_c(G)$ 上的测度, 且保持不变性.

为在 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 上构造正测度, 我们事先取定 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 上的某个非零元 F, 构造一个近似测度 u_F, u 本质上是一个次线性泛函[28]. 利用 F 的紧支集逼近单位元, 可证明 u_F 是近似线性的. 最后, 将上述 F 可取遍 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 中非零元, 构造一个合适的紧空间, 利用紧性逼近得到正测度 u.

定义 3.9. *G 是局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 任取 $f, F \in \mathrm{C}_c^+(G)$, 定义除子 $(f : F)$ 如下:*

$$(f : F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \middle| \alpha_i \geqslant 0, \text{存在} x_i \in G, \text{使得} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_iF) \geqslant f, \text{其中} 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$$

上述定义中, 拓扑群 G 对拓扑空间 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 是左平移作用.

下面引理(3.10)指出, 对于局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 上述定义(3.9)总是有意义的.

引理 3.10. *G 是局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 任取 $f, F \in \mathrm{C}_c^+(G)$, 则存在有限个正实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 以及 G 中的有限个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得成立如下关系:*

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_iF) \geqslant f$$

下面, 我们列出上述所定义除子的一些性质, 并简单证明最后一条性质:

性质 3.11. *G 是局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 任取 $f, g, F \in \mathrm{C}_c^+(G)$. 以下性质成立:*

(1) $(f : F) \geqslant 0$.

(2) $(f : F) \leqslant (f : g)(g : F)$.

(3) $(f + g : F) \leqslant (f : F) + (g : F)$.

(4) *对任意的* $x \in G$, $(xf : F) = (f : F)$.

(5) *对任意的* $a > 0$, *有* $(af : F) = a(f : F)$.

(6) *对 G 上任意的左 Haar 测度 u, 则有 $u(F) > 0$, 且 $u(f) \leqslant (f : F)u(F)$.*

证明. 性质 (1) – (5) 是容易从定义验证的. 下面, 我们给出 (6) 的证明. 取 $H \in \mathrm{C}_c^+(G)$, 使得 $u(H) \neq 0$. 否则 u 恒为零映射, 从而不是一个 Haar 测度, 矛盾. 根据引理(3.10), 存在有限个正实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 以及 G 中的有限个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i F) \geqslant H$$

根据 u 的非负性、线性性及其不变性, 我们有:

$$0 \leqslant u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i F) - H\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(F) - u(H)$$

于是,

$$u(F) \geqslant \frac{u(H)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} > 0$$

□

下面, 我们定义 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 上的一个近似测度, 它本质上是一个次线性泛函.

定义 3.12. *G 是局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 取定 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 中的非零元 F, f^*. 定义 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 上的一个近似测度如下:*

$$\begin{aligned} u_F : \mathrm{C}_c^+(G) &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto u_F(f) := \frac{(f:F)}{(f^*:F)} \end{aligned}$$

由于 $(f^*:F) > 0$, 上述定义是合理的.

下面, 我们陈述定义在 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 上的近似测度 u_F 的一些性质. u_F 本质上是一个次线性泛函.

性质 3.13. *G 是局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 取定 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 中的非零元 F, f^*. 对任意的 $f, g \in \mathrm{C}_c^+(G)$, 以下性质成立:*

(1) 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}^+$, 成立 $u_F(\lambda f) = \lambda u_F(f)$.

(2) $U_F(f+g) \leqslant u_F(f) + u_F(g)$.

(3) 如果 $f \leqslant g$, 我们有 $u_F(f) \leqslant u_F(g)$.

(4) 对任意的 $t \in G$, 有 $u_F(tf) = u_F(f)$.

(5) $f \neq 0$, 则 $u_F(f) \geqslant 0$.

(6) $\frac{1}{(f^*:f)} \leqslant u_F(f) \leqslant (f:f^*)$.

证明. (1) – (5) 从性质(3.11)出发是容易验证的. 我们仅给出 (6) 的证明. 根据性质(3.11), 我们有:

$$(f:F) \leqslant (f:f^*)(f^*:F)$$

于是, $u_F(f) \leqslant (f:f^*)$. 同理, 根据 $(f^*:F) \leqslant (f^*:f)(f:F)$, 有 $u_F(f) \geqslant \frac{1}{(f^*:f)}$. □

下面, 我们陈述 u_F 在局部上是近似保持加法的. 性质的证明需要用到引理(3.2), 局部紧致 Hausdorff 的条件是必要的. 详细证明可见 [2.3,[34]].

性质 3.14. *G 是一个局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 取定非零函数 $f^*, F \in \mathrm{C}_c^+(G)$. 对任意的 $f_1, f_2 \in \mathrm{C}_c^+(G)$, 任意的 $\epsilon > 0$, 存在单位元 e 的邻域 U, 只要 $\mathrm{supp}(F) \subseteq U$, 就有:*

$$u_F(f_1 + f_2) \geqslant u_F(f_1) + u_F(f_2) - \epsilon$$

下面, 我们来证明 Haar 测度 u 的存在性. 从直观上来说, u 是当 F 的紧支集 $\mathrm{supp}(F)$ 趋向单位元 e 时, u_F 的" 极限".

性质 3.15 (Haar 测度的存在性). *G 是一个局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, 则 G 上存在一个左 Haar 测度 u.*

证明. 设 E 是 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 中的非零函数集. 取定 $f^*, F \in E$, 对任意的 $f \in \mathrm{C}_c^+(G)$, 根据性质(3.13), 有:

$$u_F(f) \in \left[\frac{1}{(f^*:f)}, (f:f^*)\right] = J(f)$$

记上述区间为 $J(f)$. $J(f)$ 是 $\mathbb{R}$ 的紧集. 作乘积空间如下:

$$J = \prod_{f \in E} J(f)$$

根据性质(1.9), 我们知 J 也是紧集. 记 $x_F = \{u_F(f)\}_{f \in E}$ 为 E 在 u_F 下的像, 则 $x_F \in J$. 设 e 是拓扑群 G 的单位元. 对单位元 e 的每个邻域 U, 作 J 中子集:

$$A_U = \{x_F \mid \mathrm{supp}(F) \subseteq U\}$$

于是, 我们得到一簇 J 中的子集 $I = \{A_U \mid U\text{是单位元 } e \text{ 的邻域}\}$. 注意到, F 的支撑集 $\mathrm{supp}(F)$ 是紧集, 根据 Urysohn 引理(3.2)可知, $E \neq \phi$, 否则 $\mathrm{supp}(F) = \phi$, 这与 F 的选取矛盾. 从而 $A_U \neq \phi$. 对任意两个单位元 e 的邻域 V_1, V_2, 根据邻域性质, 存在 e 的邻域 V, 使得 $V \subseteq V_1 \cap V_2$. 从而, 我们有:

$$A_V \subseteq A_{V_1} \cap A_{V_2}$$

J 是紧空间, 根据性质(1.9), 存在 $x = \{u(f)\}_{f \in E} \in J$, 满足:

$$x \in \bigcap_{U \in I} \overline{A_U}$$

换句话说, 任给 $\epsilon > 0$, 任给单位元 e 处的邻域 W, 以及任给有限个函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in E$, 存在 $F \in E$, 有 $\operatorname{supp}(F) \subseteq W$, 且对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$, 如下关系成立:

$$\mid u(f_i) - u_F(f_i) \mid < \frac{\epsilon}{2}$$

对任意的 $f \in E, s \in G$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, 根据近似测度 u_F 的性质(3.13), 我们有:

$$\begin{aligned} \mid u(sf) - u(f) \mid &\leqslant \mid u(sf) - u_F(sf) \mid + \mid u_F(sf) - u(f) \mid \\ &= \mid u(sf) - u_F(sf) \mid + \mid u_F(f) - u(f) \mid < \epsilon \end{aligned}$$

类似地, 我们可得到 $\mid u(\lambda f) - \lambda u(f) \mid < \epsilon$. 根据性质(3.14), 只要 $\operatorname{supp}(F) \subseteq W$, 则对任意的 $\eta > 0$, 我们有:

$$u_F(f_1 + f_2) \geqslant u_F(f_1) + u_F(f_2) - \eta$$

于是,

$$\begin{aligned} \mid u(f_1 + f_2) - (u(f_1) + u(f_2)) \mid &\leqslant \mid u(f_1 + f_2) - u_F(f_1 + f_2) \mid + \mid u_F(f_1) - u(f_1) \mid + \mid u_F(f_2) - u(f_2) \mid + \\ &< \eta + \frac{3}{2}\epsilon \end{aligned}$$

综上所述, 只要当 F 的支撑集 $\operatorname{supp}(F)$ 足够小, 则可证明 u 是一个不变正测度:

$$\begin{aligned} u(f) &\geqslant \frac{1}{(f^* : f)} > 0, \\ u(sf) &= u(f), \\ u(\lambda f) &= \lambda u(f), \\ u(f_1 + f_2) &= u(f_1) + u(f_2) \end{aligned}$$

即 u 是 $\mathrm{C}_c^+(G)$ 上的正线性泛函, 且在 G 作用下不变. 根据定理(3.6), u 可以唯一延拓为 $\mathrm{C}_c(G)$ 上的测度 $\tilde{u}$. 容易验证 $\tilde{u}$ 相对 G 是不变的. $\tilde{u}$ 是 G 的 Haar 测度. □

3.2.2 Haar 测度的唯一性

最后, 作为本节的结束, 我们不加证明的陈述 Haar 测度的唯一性, 唯一性的证明需要借助一些分析学上的积分的工具, 相关证明可参考 [2.3,[36]], [9.2,[13]], [2.2,[28]]

性质 3.16 (Haar 测度的唯一性). *G 是一个局部紧致的 Hausdorff 拓扑群, u, v 是 G 上的两个左 Haar 测度, 则存在 $\lambda \in \mathbb{R}^+$, 使得 $u = \lambda v$.*

第 4 章　紧群的表示

一般的群论, 环论, 域论, 模论, 及非结合代数李代数, Jordan 代数等经典的代数结构的研究, 一方面, 我们可以从这些代数结构本身出发, 研究它们的子系统, 商系统, 结构模块, 局部结构, 结构不变量, 全局维数, 局部维数等; 另一方面, 我们可以借助表示论的手段, 考虑某个其他的代数系统 (可以是一般的集合, 线性空间, 交换环, 拓扑空间等) 对我们所研究代数系统的一个" 作用", 研究此作用所得到的复合结构, 将复合结构的研究从而反馈到原代数结构.

本章我们讨论紧群的表示. 我们将给出紧群表示的一些重要结果. 其中, 最主要的结果是 Peter-Weyl 定理和 Schur 正交关系. 这些结果的证明需要使用第三章 Haar 测度意义下的积分, 因此, 我们总假定本章的拓扑群是 Hausdorff 的. 本章中若不加声明, 涉及到的域都是复数域 $\mathbb{C}$.

4.1　局部紧 Hausdorff 拓扑群的表示

对于拓扑群, 我们可以考虑拓扑空间对它的连续作用; 在大多数情形下, 这种作用是线性的就足够强大. 故我们通常选取拓扑线性空间 [18]对拓扑群连续作用. 对于一般的局部紧 Hausdorff 拓扑群, 我们考虑作用空间为局部凸拓扑线性空间 [19], 这些线性空间往往是无穷维的.

记号 4.1. *设 E 是局部凸线性拓扑空间. 记 $\mathcal{L}(E)$ 为 E 到自身的有界线性算子全体. $\mathcal{L}(E)$ 关于映射的合成构成一个群.*

记号 4.2. *G 是局部紧致 Hausdorff 拓扑群, u 为其上 Haar 测度. 记 G 关于 Haar 测度 u 的平方可积复值可测函数组成的线性空间为 $L^2(G)$. 即:*

$$L^2(G)=\left\{f:G\mapsto\mathbb{C}\,\middle|\,f\text{可测},\ \int_G f^2(x)d(u(x))<\infty\right\}$$

其中, 对任意的 $f,g\in L^2(G)$, 可定义 $L^2(G)$ 的内积[20]为:

$$(f,g)=\int_G f(x)\overline{g(x)}d(u(x))$$

$L^2(G)$ 关于上述内积构成一个 Hilbert 空间[21].

4.1.1　酉表示

下面, 我们对局部紧 Hausdorff 拓扑群给出表示的概念.

[18] 拓扑线性空间可参考文献 [第一章,[31]].

[19] 称一个线性拓扑空间为局部凸线性拓扑空间, 如果原点 0 处的任意邻域都包含一个含原点 0 的凸邻域. 在线性拓扑空间中, 原点 0 处的邻域都是吸收集[31]. 在局部凸的线性拓扑空间中, 原点 0 处的每一个凸邻域, 都包含一个含原点 0 的平衡[31] 凸邻域. 也就是说, 局部凸拓扑空间在原点 0 处存在一个平衡、吸收的凸邻域. 具体内容可进一步参考文献 [第二章,[31]]

[20] 内积的定义可参考 [29].

[21] Hilbert 空间定义可见 [28].

定义 4.3. *G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群, E 是局部凸线性拓扑空间. 称映射 $\pi : G \mapsto \mathcal{L}(E)$ 为 G 的一个表示, 如果满足:*

(1) π 是一个群同态. 即对任意的 $x, y \in G$, 有 $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$.

(2) $\pi(e)$ 是恒同映射.

(3) G 在 E 上的群作用是连续的, E 是 G 拓扑齐性空间. 换句话说, 下述群作用是连续的.

$$\begin{aligned} G \times E &\mapsto E \\ (k, e) &\mapsto \pi(k)(e) \end{aligned}$$

称 E 是 G 的一个表示空间.

赋范线性空间[22]都是局部凸线性空间.[31] 内积空间上可以自然定义范数[11], 构成赋范线性空间, 从而是局部凸线性空间. 一般情况下, 我们取上述定义的表示空间为 Hilbert 空间.

定义 4.4. *若 G 是一个局部紧 Hausdorff 群, 线性空间 H 关于内积 $(\cdot, \cdot)$ 是一个 Hilbert 空间, 称映射 $\rho : G \mapsto \mathcal{L}(H)$ 是一个酉表示, 如果对任意的 $x \in K$, $\rho(x)$ 是 Hilbert 空间 H 上的酉变换. 换句话说, 对任意的 $a, b \in H$, 成立:*

$$(\rho(x)a, \rho(x)b) = (a, b)$$

例 4.5. *我们给出实数域关于加法和距离拓扑构成拓扑群 $\mathbb{R}$ 在表示空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个表示. 对 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 定义如下映射:*

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R} &\mapsto \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})) \\ x &\mapsto \rho(x).f(y) = f(x + y) \end{aligned}$$

上述映射 ρ 给出了 $\mathbb{R}$ 关于 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个酉表示.

例 4.6. *我们给出实数域上的二阶特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 在表示空间 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的一个表示. 对 $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 定义如下映射:*

$$\begin{aligned} \pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) &\mapsto \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^2)) \\ x &\mapsto \pi(x) f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = f\left(x^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

上述映射 π 给出了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的一个酉表示.

[22]赋范线性空间相关概念可参考 [11].

4.1.2 不可约表示

表示论中, 我们研究一个代数对象 O 的表示, 希望将这个表示尽可能拆解成一些在 O 作用下不变的子表示的直和. 下面, 我们引入表示直和的语言, 这对表示空间有一定拓扑上的限制.

定义 4.7. *I 是一个指标集. G 是局部紧的 Hausdorff 群, E 和 E_i 是局部凸线性空间. $\pi : G \mapsto \mathcal{L}(E)$ 是 G 的一个表示. 称表示 π 是一簇表示 $\{\pi_i : G \mapsto \mathcal{L}(E_i)\}_{i\in I}$ 的直和, 如果满足:*

(1) E_i 是 E 的 G-不变闭子空间. 且代数和 $\sum\limits_{i\in I} E_i$ 是直和, 且在 E 中稠密.

(2) π 限制在 E_i 上为 π_i.

记 $E = \oplus_{i\in I} E_i$, $\pi = \oplus_{i\in I}\pi_i$. 特别的, 如果 E 是 Hilbert 空间, π 为酉表示, 称 π 为 π_i 的 Hilbert 直和, 如果满足:

(1) $\pi = \oplus_{i\in I}\pi_i$.

(2) 对任意的 $i \neq j$, 有 E_i 与 E_j 正交. 此时, 对任意的 $x \in E$, 存在如下分解:

$$x = \sum_{i\in I} x_i$$

$$\| x \|^2 = \sum_{i\in I} \| x_i \|^2$$

其中, $x_i \in E_i$. 仅有可列多个 x_i 不为 0.

4.1.3 表示等价

在表示论中, 一个自然的问题是, 两个表示何时等价. 表示等价, 有的文献中也称为缠结. 下面, 我们给出表示缠结的定义.

定义 4.8. *设 G 是一个局部紧 Hausdorff 拓扑群, E_1, E_2 是局部凸线性拓扑空间. $\pi_1 : G \mapsto \mathcal{L}(E_1)$ 和 $\pi_2 : G \mapsto \mathcal{L}(E_2)$ 是 G 的两个表示, 称表示 π_1 和 π_2 等价, 如果存在连续线性同构 $T : E_1 \mapsto E_2$[23], 使得对任意的 $x \in G$, 成立 $T \circ \pi_1(x) = \pi_2(x) \circ T$. 称算子 T 为表示 π_1, π_2 的缠结算子. 如果 E_1, E_2 是 Hilbert 空间, 则根据 [定理 6.1,[35]] 知, T 的逆算子 T^{-1} 也是有界线性算子. 特别的, 如果 π_1, π_2 都是酉表示, T 是酉算子, 则称表示 π_1 和 π_2 是酉等价的.*

4.2 紧群的表示与特征标

对于紧 Hausdorff 拓扑群, 我们考虑作用空间为性质很好的 Hilbert 空间. 换句话说, 对于紧 Hausdorff 群, 我们额外关心它的酉表示. 我们可对 Hausdorff 紧拓扑群定

[23] 正如前文脚注 11, 此处 T 的逆映射一般不是连续的.

义有限维线性表示. 事实上, 根据定理(??)可知, 研究 Hausdorff 紧群的酉表示, 只需要研究其有限维表示. 下面, 我们给出 Hausdorff 紧群的有限维线性表示的定义. 设 V 是有限维的内积空间, 其上线性变换在内积确定的拓扑下是连续的.[28] 从而, 我们有 $\mathrm{GL}(V) = \mathcal{L}(V)$. 下述定义实际上与定义(4.3)是一致的.

定义 4.9. *K 是一个 Hausdorff 紧拓扑群, V 是一个复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维内积空间. 称映射 $\rho : K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 为拓扑群 K 的一个线性表示, 如果 ρ 满足以下条件:*

(1) ρ 是一个群同态. 即对任意的 $x, y \in K$, 有 $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$.

(2) $\rho(e)$ 是恒同映射.

(3) K 在 V 上的群作用是连续的, V 是 K 拓扑齐性空间. 下述群作用是连续的.

$$\begin{aligned} K \times V &\mapsto V \\ (k, v) &\mapsto \rho(k)(v) \end{aligned}$$

称 V 是 K 的一个表示空间. V 在 $\mathbb{C}$ 上的维数称为表示 ρ 的维数.

根据 [命题 2.4.5,[38]], 一个 Hausdorff 紧群 K 是幺模群. 幺模群上的左 Haar 测度等于右 Haar 测度. 幺模群是指模函数恒为常值 1 的群; 模函数直观上刻画了局部紧 Haudorff 群 G 上两个 Haar 测度所相差的正常数, 它是一个连续拓扑群同态. 幺模群相关内容可进一步参考文献 [2.4, [38]], [3.4,[16]]. 于是, 对于 Hausdorff 紧群, 我们有如下定理:

定理 4.10. *Hausdorff 紧群 G 上的 Haar 测度是双不变的. 换句话说, Hausdorff 紧群 G 上的左 Haar 测度 u_L 等于右 Haar 测度 u_R, 记为 u. 根据 Haar 测度的唯一性(3.16), 因此, 我们总是取定 $\int_G d(u(x)) = 1$.*

对 Hausdorff 紧群的酉表示的研究. 下面. 我们不加证明的指出, 它可以拆解成有限维表示的直和. 定理的证明借助了许多分析学方面的工具, 例如谱分析和算子理论等, 具体证明可参考 [命题 4.2.1,[38]]. 因此, 对于 Hausdorff 紧群酉表示的研究, 我们只需要研究清楚其有限维表示.

性质 4.11. *Hausdorff 紧群的任意一个酉表示, 它都是有限维表示的直和.*

下面, 我们指出, 对于紧 Hausdorff 拓扑群的有限维表示, 其表示空间上自然存在一个内积, 且该内积在拓扑群作用下具有不变性. 换句话说, 紧 Hausdorff 拓扑群的有限维表示都是某个内积下的酉表示.

性质 4.12. *K 是一个 Hausdorff 紧群, V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间, $\rho : K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 是 K 的连续线性表示. 则在 V 存在一个 Hermitian 内积[24]$(\cdot\,,\cdot)$, 此内积是*

[24] Hermitian 内积的定义可参考文献 [33].

$K-$ 不变的. 换句话说, 对任意的 $k \in K$, $u, v \in V$, 存在:

$$(\rho(k).u, \rho(k).v) = (u, v)$$

此时, 对任意 $x \in K$, $\rho(x)$ 在上述 Hermitian 内积下是一个酉变换. 称表示 ρ 为 K 的酉表示.

证明. 设 u 是 K 上的 Haar 测度, 且取定 $\int_G d(u(x)) = 1$. V 是有限维的线性空间, 其上总存在内积. 任取 V 上的内积 $\mathrm{B}(\cdot\,,\cdot)$, 定义双线性映射:

$$\begin{aligned} \mathrm{B} : V \times V &\mapsto \mathbb{C} \\ (u, v) &\mapsto \int_K \mathrm{B}(\rho(k)u, \rho(k)v) d(u(k)) \end{aligned}$$

注意到, V 上的内积 B 是连续的, 从而上述双线性型 B 是良定义的. 从 B 和积分的对称性和双线性性, 可以得到 $(\cdot\,,\cdot)$ 的对称性和双线性性. 如果 $u = v$, 则对任意的 $k \in K$, $\mathrm{B}(\rho(k)u, \rho(k)u) \geqslant 0$. 从而, 由于积分的保号性, $(u, u) \geqslant 0$. 且 $(u, u) = 0$ 当且仅当 $u = 0$. 从而 $(\cdot\,,\cdot)$ 是 V 上的一个内积. 下面验证其 $K-$ 不变性. 任取 $g \in K$, 根据 Haar 测度 u 的不变性, 考察:

$$\begin{aligned} (\rho(g).u, \rho(g).v) = \int_K \mathrm{B}(\rho(k)\rho(g)u, \rho(k)\rho(g)v) d(u(k)) &= \int_K \mathrm{B}(\rho(kg)u, \rho(kg)v) d(u(k)) \\ &= \int_K \mathrm{B}(\rho(k)u, \rho(k)v) d((R_g)_* u) \\ &= \int_K \mathrm{B}(\rho(k)u, \rho(k)v) = (u, v) \end{aligned}$$

其中, 上述 $(R_g)_* u = u$ 表示 Haar 测度 u 在右平移下保持不变. 于是, 我们得到 K-不变性. □

注记 4.13. *根据文献 [28], 有限维空间都是完备的. 故有限维空间都是 Hilbert 空间, 上述命题中的酉表示与一般的酉表示(4.4)是一致的.*

对于 Hausdorff 紧群 K 的一个表示, 类似定义(4.7), 我们也自然希望将这个表示尽可能拆解成一些在 K-不变的子表示的直和. 在这种拆解方式下, 最小的表示模块是我们必须研究清楚的对象. 我们给出如下不可约表示的定义.

定义 4.14. *K 是一个 Hausdorff 紧群, V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间, $\rho : K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 是 K 的连续线性表示. 称子空间 W 是 K-不变的, 如果对任意的 $k \in K$, $\rho(k).W \subseteq W$. 称表示 ρ 是不可约表示, 如果表示空间 V 不存在除 $\{0\}$ 和 V 以外的 K-不变子空间. 称表示 ρ 是完全可约的, 如果表示空间 V 可以写成 K-不变子空间 V_i 的直和 $V = \oplus_i V_i$.*

注记 4.15. *对于一般的局部紧 Hausdorff 拓扑群上的表示, 我们也可以定义不可约表示和完全可约表示. 此时, 我们需要子空间有一些拓扑上的要求. 设 G 是一个局部紧*

Hausdorff 拓扑群, E 是局部凸线性拓扑空间, $\pi : G \mapsto \mathcal{L}(E)$ 是一个表示. 称 π 是不可约表示, 如果表示空间 E 不存在除 $\{0\}$ 和 E 以外的 G-不变闭子空间. 根据文献 *[32]*, 完备集都是闭集. 有限维空间的子空间也是有限维的, 故完备, 自然是闭的. 这与定义(4.14)是一致的.

下面, 我们不加证明的指出, 有限维酉表示是完全可约的. 相关证明是容易的, 并采用数学归纳法即可. 可参考相关文献 [性质 4.2,[16]].

性质 4.16. *K 是一个 Hausdorff 紧群[25], V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间, $\rho : K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 是 K 的连续表示. 有限维酉表示 ρ 是完全可约的. 换句话说, 存在如下直和分解:*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

其中, 每个 V_i 是 V 的 K-不变子空间. 即对任意的 $k \in K$, $\rho(k)V_i \subseteq V_i$. 且 V_i 是不可约的.

下面我们不加证明地给出著名的 Schur 引理, 它在各种表示论中都存在相应的形式, 起着十分重要的作用.

定理 4.17 (Schur 引理). *G 是一个局部紧 Hausdorff 群, V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的局部凸线性拓扑空间. 如果 $\sigma : G \mapsto \mathcal{L}(V)$ 是一个不可约酉表示, φ 是 V 上的线性变换, 且对任意的 $g \in G$ 满足:*

$$\varphi \circ \sigma(g) = \sigma(g) \circ \varphi$$

则 φ 是数乘线性变换, 存在复数 w, 使得:

$$\varphi = wId_v.$$

利用上述的 Schur 引理(4.17), 我们可以对 Hausdorff 紧群的表示等价给出一个数量上的刻画. 首先, 我们不加证明的指出, 给定 Hausdorff 紧群的两个有限维表示, 对任意的表示空间上的线性映射, 我们有一个线性缠绕映射. 具体见如下性质.

性质 4.18. *K 是一个 Hausdorff 紧群, V_1, V_2 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间. $\rho_1 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho_2 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_2)$ 是 K 的两个有限维酉表示. 对任意的线性映射 $L_0 : V_1 \mapsto V_2$, 定义映射 $L_{inv} : V_1 \mapsto V_2$ 如下:*

$$L_{inv} = \int_K \rho_2(x^{-1}) \circ L_0 \circ \rho_1(x) d(u(x)) \tag{1}$$

则 L_{inv} 是线性的, 且对任意的 $k \in K$, $L_{inv} \circ \rho_1(k) = \rho_2(k) \circ L_{inv}$. 特别的, 如果 $\rho_1 = \rho_2$, $V_1 = V_2$, 我们有 $\mathrm{tr}(L_{inv}) = \mathrm{tr}(L_0)$.

上述性质中定义的线性缠结算子, 可以刻画两个表示相差距离彼此等价” 相差多少”.

[25] 该性质对于局部紧 Hausdorff 拓扑群也成立.

性质 4.19. *K 是一个 Hausdorff 紧群, V_1, V_2 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间. $\rho_1 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho_2 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_2)$ 是 K 的两个有限维 (酉) 表示. 设 $L : V_1 \mapsto V_2$ 是一个线性缠结算子, 即对任意的 $k \in K$, 成立 $L \circ \rho_1 = \rho_2 \circ L$. 我们有如下结果:*

(1) $\ker(L)$ *和* $\mathrm{Im}(L)$ *分别在表示 ρ_1 和 ρ_2 的作用下是 K-不变的.*

(2) 如果 ρ_1 是不可约表示, 则 $L = 0$ 或者 L 是单射.

(3) 如果 ρ_2 是不可约表示, 则 $L = 0$ 或者 L 是满射.

(4) 如果 ρ_1 和 ρ_2 都是不可约表示, 则 $L = 0$ 或者 L 是连续线性缠结算子.

(5) Hausdorff 紧群 K 上的任意两个不可约有限维 (酉) 表示, 它们要么等价, 要么之间的线性缠结映射只有零映射.

(6) 如果 ρ_1 和 ρ_2 都是不可约表示, ρ_1 和 ρ_2 不等价, 则性质(4.18)*中定义的线性缠结映射 L_{inv} 是零映射. 即*

$$L_{inv} = \int_K \rho_2(x^{-1}) \circ L_0 \circ \rho_1(x) d(u(x)) = 0$$

(7) [26] *如果 $\rho_1 = \rho_2$ 均为不可约表示, $V_1 = V_2$, 则性质*(4.18)*中定义的线性缠结映射是数乘映射. 即存在 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得*

$$L_{inv} = \int_K \rho_2(x^{-1}) \circ L_0 \circ \rho_1(x) d(u(x)) = \lambda \cdot id$$

类似于有限群表示论, 在 Hausdorff 紧群的表示中, 我们也可以引入特征标. 它是表示论研究中的重要工具.

定义 4.20. *K 是一个 Hausdorff 紧群, V 是复数域 $\mathbb{C}$ 的线性空间. $\rho : K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 是一个有限维表示. 定义复值函数 χ_ρ 如下:*

$$\begin{aligned} \chi_\rho : K &\mapsto \mathbb{C} \\ k &\mapsto \chi_\rho(k) = \mathrm{tr}(\rho(k)) \end{aligned}$$

称复值函数 $\chi_\rho : K \mapsto \mathbb{C}$ 为表示 ρ 提供的特征标 [27]*.*

下面, 我们指出, 等价的酉表示, 其特征标相同.

性质 4.21. *K 是一个 Hausdorff 紧群, V_1, V_2 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间. $\rho_1 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho_2 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_2)$ 是 K 的两个有限维不可约 (酉) 表示. 如果表示 ρ_1 和 ρ_2 等价, 则它们提供相同的特征标 $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.*

[26] 性质(4.19)中的 (7) 在实数域 $\mathbb{R}$ 的情形是不成立. 相关反例可参考 [68 页,[16]].

[27] 对于一般拓扑群的表示, 我们也可以类似定义特征标.

证明. 表示 ρ_1 和 ρ_2 等价, 则存在缠结同构映射 $P : V_1 \mapsto V_2$, 使得对任意的 $g \in K$, 有:

$$\rho_2(g) \circ P = P \circ \rho_1(g)$$

于是, 我们有:

$$\chi_{\rho_2}(g) = \mathrm{tr}(\rho_2(g)) = \mathrm{tr}(P \circ \rho_1(g) \circ P^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho_1(g)) = \chi_{\rho_1}(g)$$

于是, $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

□

4.3 Schur 正交关系

在本节中, 我们只讨论 Hausdorff 紧群的表示. 在有限群表示论中, 一个有限群的所有不可约表示的特征标构成一个特征标表. 对于有限群的复表示而言, 复特征标表不但可以直接反映该群的共轭类, 正规子群等信息; 而且其上的正交关系是解决有限群论中著名问题 Burnside 猜想的有力工具. [28] 作为有限群的推广, Hausdorff 紧群的不可约表示有著名的 Schur 正交关系. 阐述 Schur 正交关系是本节的主要目标.

定义 4.22. *K 是一个 Hausdorff 紧群, u 为 K 上的 Haar 测度, V 是复数域上的有限维线性空间. $\rho : K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 是一个有限维表示. 根据性质(4.12), V 上存在一个 K-不变的 Hermitian 内积, 记为 $(\cdot, \cdot)$. 对任意的 $u, v \in V$, 定义如下函数:*

$$\begin{aligned} f_{u,v} &: K \mapsto \mathbb{C} \\ & k \mapsto f_{u,v}(k) = (\rho(k)u, v) \end{aligned}$$

称上述函数 $f_{u,v}$ 为表示 ρ 的矩阵元素. 根据 Cauchy 不等式 [命题 1.1,[33]], 容易验证函数 f 在 Haar 测度 u 下是平方可积的, 即 $f \in L^2(G)$. 特别的, 当 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 V 在上述 K-不变内积 $(\cdot, \cdot)$ 下的一组单位正交基时, 对任意的 $k \in K$, 线性变换 $\rho(k)$ 在这组基下的矩阵为 $(f_{e_i,e_j}(k))_{n\times n}$.

当上述定义中的表示为不可约表示时, Schur 正交关系决定了上述定义的矩阵元素在平方可积复值可测函数空间下的 Hermitian 内积, 该内积的定义见(4.2). 我们不加证明的列出 Schur 正交关系, 其证明需要用到 Schur 引理(4.17)和性质(4.18), 具体证明可参考书籍 [4.2,[16]].

定理 4.23 (Schur 正交关系). *K 是一个 Hausdorff 紧群, u 为 K 上的 Haar 测度, V_1, V_2 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间. $\rho_1 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho_2 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_2)$ 是 K 的两个有限维不可约 (酉) 表示. 两个表示决定的 Hermitian 内积统一记为 $(\cdot, \cdot)$. 取定 $u_1, u_2 \in V_1$, $v_1, v_2 \in V_2$.*

[28] 对有限群的复特征标表的相关内容, 可参考文献 [Chapter C-2,[10]].

(1) 如果表示 ρ_1 和 ρ_2 不等价, 则有:

$$\int_K f_{v_1,v_2}(k)\overline{f_{u_1,u_2}(k)}d(u(k)) = \int_K (\rho_2(k)v_1, v_2)\overline{(\rho_1(k)u_1, u_2)}d(u(k)) = 0$$

(2) 如果表示 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, 表示空间 $V_1 = V_2 = V$, 则有:

$$\int_K f_{v_1,v_2}(k)\overline{f_{u_1,u_2}(k)}d(u(k)) = \int_K (\rho_2(k)v_1, v_2)\overline{(\rho_1(k)u_1, u_2)}d(u(k) = \frac{(v_1, u_1)\overline{(v_2, u_2)}}{\dim(V)}$$

注记 4.24. *在上述 Schur 正交关系中, 我们考虑的是复数域 $\mathbb{C}$ 上的表示. 对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的表示, Schur 正交关系*(4.23)*中 (1) 仍成立, (2) 不成立. 相关反例可参考书籍 [70 页,[16]].*

对于紧 Hausdorff 特征标, 我们也有类似上述的 Schur 正交关系, 它可以直接从表示的 Schur 正交关系计算推出. 描述前, 我们首先给出一些概念, 它们在构造李群[29]的上同调理论中非常重要.

定义 4.25. *K 是一个 Hausdorff 紧群, u 为 K 上的 Haar 测度, V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间. $\rho : K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 是一个表示. 称如下集合 V^G 为表示 ρ 不动点集:*

$$V^G = \{v \in V \mid \rho(k)(v) = v, k \in K\}$$

V^G 是 V 的线性子空间. 称如下映射为 V 到 V^G 上的投射算子:

$$\begin{aligned} p : V &\mapsto V^G \\ v &\mapsto \int_K kvd(u(k)) \end{aligned}$$

上述 p 是良定义的. 根据 *Haar* 测度 u 的不变性, 对任意的 $x \in K$, 我们有:

$$\begin{aligned} xp(v) &= x\int_K kvd(u(k)) \\ &= \int_K xkvd(u(k)) \\ &= \int_K kvd((L)_*)(u(k)) \\ &= \int_K kvd(u(k)) \\ &= p(v) \end{aligned}$$

上述 p 是满的. 对任意的 $v \in V^G$, $\int_K kvd(u(k)) = \int_K vd(u(k)) = v$. 设 $\pi : K \mapsto \mathrm{GL}(W)$ 也是 K 的一个表示. 我们有 $\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \mapsto W \mid f\text{是一个连续线性同构缠结映射}\}$.

[29] 李群英文为 Lie group, 是为了纪念挪威数学家 Sophus Lie 而命名的.

$\mathrm{Hom}(V,W)$ 关于态射合成构成一个群. 现考虑群 K 在 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 上的连续作用:

$$\begin{aligned} K\times \mathrm{Hom}(V,W) &\mapsto \mathrm{Hom}(V,W) \\ (k,f) &\mapsto k.f : v\mapsto \pi(k)f(\rho(k^{-1})v) \end{aligned}$$

在上述作用下, $\mathrm{Hom}(V,W)$ 的不动点集为 $\mathrm{Hom}^G(V,W)$. 同样的, 我们有投影算子:

$$\begin{aligned} p:\mathrm{Hom}(V,W) &\mapsto \mathrm{Hom}^G(V,W) \\ f &\mapsto p(f)=\int_K k.fd(u(k)) \end{aligned}$$

特别的, 如果 ρ 是不可约表示, 则根据 *Schur* 引理(4.17), $\mathrm{Hom}^G(V,V)\cong\mathbb{C}$.

定理 4.26 (Schur 正交关系). *K 是一个 Hausdorff 紧群, u 为 K 上的 Haar 测度, V_1,V_2 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间. $\rho_1:K\mapsto \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho_2:K\mapsto\mathrm{GL}(V_2)$ 是 K 的两个有限维不可约 (酉) 表示. 两个表示决定的 Hermitian 内积统一记为 $(\cdot,\cdot)$. 则以下性质成立:*

(1) $\int_{k\in K}\chi_{\rho_1}(k)d(u(k))=\dim(V_1^G)$.

(2) $(\chi_{\rho_1},\chi_{\rho_2})=\int_K\chi_{\rho_1}(k)\chi_{\rho_2}(k)d(u(k))=\dim\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$.

(3) 如果 ρ_1 和 ρ_2 是不可约酉表示, 则

$$\int_K\overline{\chi_{\rho_1}(k)}\chi_{\rho_2}(k)=\begin{cases}1 & ,\rho_1\text{和}\rho_2\text{等价}\\ 0 & ,\rho_1\text{和}\rho_2\text{不等价}\end{cases}$$

对于紧 Hausdorff 群的复数域上的酉表示, Schur 正交关系的重要结果之一是用特征标给出了有限维酉表示间等价的充分必要条件. 有限维酉表示的特征标完全决定了其等价关系.

定理 4.27. *K 是一个 Hausdorff 紧群, V_1,V_2 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间. $\rho_1: K\mapsto\mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho_2:K\mapsto\mathrm{GL}(V_2)$ 是 K 的两个有限维不可约 (酉) 表示. 两个表示决定的 Hermitian 内积统一记为 $(\cdot,\cdot)$. 表示 ρ_1 和 ρ_2 是等价的, 当且仅当它们提供相同的特征标 $\chi_{\rho_1}=\chi_{\rho_2}$.*

证明. 对于必要性, 从性质(4.21)可得. 下面考虑充分性. 首先, 我们处理 ρ_1,ρ_2 是不可约表示的情形. 假设 ρ_1 和 ρ_1 不等价. 取 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 V_1 的一组标准正交基, 则我们有:

$$\chi_{\rho_1}(k)=\mathrm{tr}(\rho_1(k))=\sum_{i=1}^n(\rho_1(k)e_i,e_i)=\sum_{i=1}^n f_{e_i,e_i}(k)$$

也就是说, 取定一组标准正交基后, 特征标 χ_{ρ_1} 是矩阵元素的和. 根据 Schur 正交关

系(4.23)(2), 我们有:

$$\int_K \mid \chi_{\rho_1}(k) \mid^2 d(u(k)) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_K f_{e_i,e_i} \overline{f_{e_j,e_j}} d(u(k)) = \frac{1}{\dim(V_1)} \sum_{i=1}^{n} \mid (e_i, e_i) \mid^2 = 1$$

因为 ρ_1 和 ρ_1 不等价, 根据根据 Schur 正交关系(4.23)(1), 我们有:

$$\int_K \chi_{\rho_1}(k) \overline{\chi_{\rho_2}(k)} d(u(k)) = 0$$

从而, $\chi_{\rho_1} \neq \chi_{\rho_2}$, 否则 $0 = 1$ 矛盾. 也就是说, 对于有限维不可约酉表示, 其特征标可完全决定等价关系. 下面, 我们考虑一般的情形. 根据性质(4.16), 有限维酉表示是完全可约的. 对于 ρ_1, 我们存在如下 K-不变子空间直和分解:

$$V_1 = W_1 \oplus W_2 \cdots \oplus W_n$$

W_i 是 K-不变子空间. 记 $\sigma_i = \rho_1|_{W_i}$. σ_i 是不可约表示. 于是, $\chi_{\rho_1} = \chi_{\sigma_1} + \chi_{\sigma_2} + \cdots + \chi_{\sigma_n}$. 根据上述不可约表示的情形, 如下关系成立:

$$\int_K \chi_{\rho_1}(k) \overline{\chi_{\sigma_i}(k)} d(u(k)) = N_i$$

其中, N_i 为 ρ_1 在上述分解中 σ_i 出现的次数. 如果 $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$, 则 ρ_2 在类似上述分解中 σ_i 出现的次数也是 N_i. 换句话说, ρ_1 和 ρ_2 不可约分解具有相同的因子及分解重数. 从而表示等价. □

下面, 讨论 S^1 在复数域上的不可约酉表示.

例 4.28. 拓扑群 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid\mid z \mid= 1\}$ 是一个 *Hausdorff* 紧群, 且是一个交换群. 根据 *Schur* 引理(4.17), 交换群在复数域 $\mathbb{C}$ 上不可约酉表示都是一维的. 于是, S^1 在复数域 $\mathbb{C}$ 上任意不可约酉表示 ρ 在乘法群 $\mathbb{C}^*$ 取值. 即 $\rho : S^1 \mapsto \mathbb{C}^*$. 因为 ρ 是连续同态, 根据性质(1.9)知, 紧集的在连续映射下的像是紧集. 于是 $\rho(S^1)$ 是 $\mathbb{C}^*$ 的紧子群, 又因为 ρ 是酉变换, 保持距离, 从而 $\rho(S^1) = S^1$. 记 i 为虚数单位, 连续同态 ρ 具有如下形式:

$$\rho : S^1 \mapsto \mathbb{C}^*$$
$$e^{it} \mapsto \rho(e^{it}) = e^{i\theta(t)}$$

其中 $\theta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 是线性映射. 且 $\theta(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$. 于是, 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\theta(t) = nt$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$. 综上所述, S^1 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的不可约酉表示 ρ 都形如 $\rho(z) = z^n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$.

4.4 Peter-Weyl 定理

Peter-Weyl 定理(4.33)是紧群表示论的核心结果.

设 K 是一个 Hausdorff 紧群, 记 K 上的复值连续函数全体为 $\mathrm{C}(K)$.

$$\mathrm{C}(K) = \{f : K \mapsto \mathbb{C} \mid f\text{是连续函数}\}$$

在 $\mathrm{C}(K)$ 中引入范数:

$$|| f ||_\infty = \sup_{k\in K} | f(k) |$$

$\mathrm{C}(K)$ 关于上述范数构成一个 Bananch 空间. 因为 K 是紧的, 从而每个连续函数都是有界的, 从而可积. 故 $\mathrm{C}(K) \subseteq L^2(K)$. 根据书籍 [61 页,[16]], 我们知 $\mathrm{C}(K)$ 在 $L^2(K)$ 中是稠密的.

定义 4.29. *K 是一个 Hausdorff 紧群, 取定 $k \in K$. 定义 $\mathrm{C}(K)$ 的左平移算子 L_k 和右平移算子 R_k 如下* [30] *:*

$$\begin{aligned} L_k : \mathrm{C}(K) &\mapsto \mathrm{C}(K) \\ f &\mapsto L_k(f) = f(kx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k : \mathrm{C}(K) &\mapsto \mathrm{C}(K) \\ f &\mapsto R_k(f) = f(xk) \end{aligned}$$

容易验证, $L_k(f), R_k(f) \in \mathrm{C}(K) \subseteq L^2(K)$. 左平移算子 L_k 和右平移算子 R_k 是保范的, 即 $|| L_k(f) ||_\infty = || R_k(f) ||_\infty = || f ||_\infty$.

在有限群表示中, 当表示空间为群代数时, 这样的表示称为正则表示. 有限群的正则表示在证明有限群论 Burnside 定理和 Frobenius 定理时起到关键作用. [31] 类似的, 对 Hausdorff 紧群, 当表示空间为 $\mathrm{C}(K)$ 或者 $L^2(K)$ 时, 我们也有类似的正则表示. 它在证明 Peter-Weyl 定理(4.33)中起到了关键作用. [32]

定义 4.30. *K 是一个 Hausdorff 紧群, 利用左平移算子 L_k 和右平移算子 R_k, 可定义 K 的左正则表示 ρ_L 和右正则表示 ρ_R 如下.*

$$\begin{aligned} \rho_L : K &\mapsto \mathcal{L}(L^2(K)) \\ k &\mapsto \rho_L(k) = L_{k^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_R : K &\mapsto \mathcal{L}(L^2(K)) \\ k &\mapsto \rho_R = R_k \end{aligned}$$

设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间. $\rho : K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 是 K 的一个有限维连续酉表示. 记 $\mathrm{C}(K)_\rho$ 为 ρ 的矩阵元素 $f_{u,v}$ 生成的复线性空间, 关于空间 $\mathrm{C}(K)_\rho$, 我们不加证明的列出以下性质. 相关证明可参考书籍 [4.4,[16]].

[30] 平移算子对于 K 上的一般函数也可以定义.

[31] 有限群论 Burnside 定理和 Frobenius 定理及其证明可参考书籍 [Chapter -2C. 10,[10]].

[32] 本文不再证明 Peter-Weyl 定理, 其证明可参考 [4.2,[38]].

性质 4.31. *K 是一个 Hausdorff 紧群, 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间. $\rho: K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 是 K 的一个有限维连续酉表示. 我们有:*

(1) $\mathrm{C}(K)_\rho$ 是 $\mathrm{C}(K)$ 的子空间.

(2) $\mathrm{C}(K)_\rho$ 是有限维线性空间, 如果 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为 V 的一组基, 则 $\{f_{v_i,v_j}\}$ 为 $\mathrm{C}(K)_\rho$ 的一组基.

(3) $\mathrm{C}(K)_\rho$ 在左平移算子 L_k 和右平移算子 R_k 的作用下是不变的.

(4) 设 $\rho_1 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho_2 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_2)$ 是两个等价有限维酉表示, 则 $\mathrm{C}(K)_{\rho_1} = \mathrm{C}(K)_{\rho_2}$.

(5) 设 $\rho_1 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho_2 : K \mapsto \mathrm{GL}(V_2)$ 是两个不等价有限维不可约酉表示. 根据 *Schur* 关系(4.23)*(1)* 可知, $\mathrm{C}(K)_{\rho_1}$ 与 $\mathrm{C}(K)_{\rho_2}$ 在 $L^2(K)$ 的内积下正交. 特别的,

$$\mathrm{C}(K)_{\rho_1} \cap \mathrm{C}(K)_{\rho_2} = \{0\}$$

(6) 如果 ρ 是不可约表示, 则任取 $0 \neq v \in V$, 定义映射:

$$\begin{aligned} P_v : V &\mapsto \mathrm{C}(K)_\rho \\ u &\mapsto P_v(u) = f_{u,v} \end{aligned}$$

P_v 是单的, 关于 $\mathrm{C}_\rho(K)$ 上右正则表示 R_k 的线性缠结映射. 特别的, P_v 的像空间 $\mathrm{Im}(P_v)$ 是与表示 ρ 等价的不可约表示的表示空间.

(7) 根据性质(4.16), K 的一个有限维连续酉表示 $\rho : K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 是完全可约的. 于是, 存在 K-不变子空间 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 使得成立直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. 记表示 ρ 在 V_i 中的限制为 ρ_i. 我们有分解 $\mathrm{C}(K)_\rho = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{C}(K)_{\rho_i}$. 此分解一般不是直和分解. 这是因为 ρ_i 和 ρ_j 如果等价, 则根据 *(4)*, 知 $\mathrm{C}(K)_{\rho_i} = \mathrm{C}(K)_{\rho_j}$. 如果 $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ 互不等价, 则上述分解是直和分解:

$$\mathrm{C}(K)_\rho = \mathrm{C}(K)_{\rho_1} \oplus \mathrm{C}(K)_{\rho_2} \oplus \mathrm{C}(K)_{\rho_n}$$

下面, 我们引入表示函数的概念. Peter-Weyl 定理(4.33)指出, 对 Hausdorff 紧群 K, K 上的平方可积复值函数可以用 K 的表示函数逼近和表示.

定义 4.32. *K 是 Hausdorff 紧群. V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间. $\rho : K \mapsto \mathrm{GL}(V)$ 是 K 的一个有限维连续酉表示. 称线性空间 $\mathrm{C}(K)_\rho$ 中的元素为关于表示 ρ 的表示函数. K 的所有表示函数构成的线性空间记为 $\mathcal{R}(K)$. 设 $\tilde{K}$ 是 K 的所有有限维酉表示构成的集合, 则 $\mathcal{R}(K)$ 具有如下分解:*

$$\mathcal{R}(K) = \sum_{\rho \in \tilde{K}} \mathrm{C}(K)_\rho$$

特别的, 如果 $\tilde{K}$ 是 K 的一组极大互不等价的有限维不可约酉表示, 则有:

$$\mathcal{R}(K)=\bigoplus_{\rho\in\tilde{K}}\mathrm{C}(K)_{\rho}$$

最后, 我们不加证明的陈述 Hausdorff 紧群表示论的最重要的 Peter-Weyl 定理, 它的证明可参考书籍 [4.2,[38]] 和书籍 [4.4,[16]].

定理 4.33 (Peter-Weyl 定理). *K 是 Hausdorff 紧群, u 为 K 上的 Haar 测度. 则以下结论成立:*

(1) K 的表示函数空间 $\mathcal{R}(K)$ 在 Hilbert 空间 $L^2(K)$ 中稠密.

(2) 设 $\tilde{K}$ 是 K 的一组极大互不等价的有限维不可约酉表示. 取 $\pi\in\tilde{K}$, d_π 为表示 π 的维数. 在 π 的表示空间中选定一组标准正交基. 对任意的 $x\in K$, 记线性变换 $\pi(x)$ 在这组基下的矩阵为 $(\pi_{ij}(x))(1\leqslant i,j\leqslant d_\pi)$. 我们有 $L^2(K)$ 中的标准正交基如下:

$$\{d_\pi^{\frac{1}{2}}\pi_{ij}(\,\cdot\,)\}_{\pi\in\tilde{K}}$$

(3) 取 $f\in L^2(G)$, 我们有 f 的 Fourier 级数的展开式:

$$f=\sum_{\pi\in\tilde{K}}d_\pi\chi_\pi * f$$

其中, 对 K 上的任意两个连续函数 $f,g\in\mathrm{C}(K)$, 定义卷积 $f*g\in\mathrm{C}(K)$ 如下:

$$\begin{aligned}*:\mathrm{C}(K)\times\mathrm{C}(K)&\mapsto\mathrm{C}(K)\\(f,g)&\mapsto f*g:x\mapsto f*g(x)=\int_K f(y)g(y^{-1}x)d(u(y))\end{aligned}$$

且对于 $f\in L^2(K)$, 成立 Plancherel 公式 [33] 如下:

$$\int_K\mid f(x)\mid^2 d(u(x))=\sum_{\pi\in\tilde{K}}d_\pi\sum_{i,j}\int_K\mid f(x)\overline{\pi_{ij}(x)}\mid^2 d(u(x))$$

(4) 设 (π,V) 是 K 的酉表示, τ 是 K 的有限维不可约酉表示. 设

$$[\tau,\pi]=\{U\mid U\text{是}V\text{的 }K\text{-不变子空间},\pi|_U\text{与}\tau\text{等价}\}$$

记 $V(\tau)$ 为 $\sum_{U\in[\tau,\pi]}U$ 的闭包. 设 $E_\tau:V\mapsto V(\tau)$ 为正交投影. 我们有以下结论成立:

(a) $E_\tau=d_\tau\int_K\pi(x)\overline{\chi_\tau}(x)d(u(x))$.

[33] 对于一般的局部紧 Hausdorff 拓扑群上的 Plancherel 公式, 可参考书籍 [定理 3.4.1,[38]].

(b) 如果 τ 和 $\tilde{\tau}$ 不等价, 则 $E_\tau E_{\tilde{\tau}} = E_{\tilde{\tau}} E_\tau = 0$.

(c) 对任意的 $v \in V$, 我们有 $v = \sum_{\tau \in \tilde{G}} E_\tau v$.

将实数域上的 Fourier 分析推广到局部紧 Hausdorff 交换群是容易的, 在这种情况下, 我们有 Plancherel 公式. Peter-Weyl 定理把 Fourier 分析推广到了非交换情形, 并且给出了 Plancherel 公式和 Fourier 展开式. Peter-Weyl 定理的一个重要应用是在证明每个紧李群都有忠实表示[34]这件事上. Peter-Weyl 定理可进一步推广到无穷维表示上去. 这些结果可参考文献 [3.4 和 3.5,[25]].

4.5 SU(2) 的表示

作为紧群表示的例子, 下面我们详细讨论 SU(2) 和 SO(3) 的表示. 本节的主要目标是给出它们不可约表示的基本刻画.

我们首先从 SU(2) 的表示出发.

定义 4.34. $\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \middle| \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$.

性质 4.35. *SU(2) 是一个 Hausdorff 紧群.*

证明. SU(2) 是 $\mathbb{R}^4$ 的子拓扑群. 考虑行列式函数:

$$\det : \mathrm{SU}(2) \mapsto \mathbb{R}$$
$$g \mapsto \det(g) = 1$$

行列式函数本质上为多项式函数, 它是连续的. $\{1\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是闭集, 从而 $\mathrm{SU}(2) = \det^{-1}(\{1\})$ 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 的闭集. 同时, SU(2) 在 $\mathbb{R}^4$ 中是有界的, 这是因为 $\mathrm{SU}(2) \subseteq S^3$. 其中,

$$S^3 = \{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1; x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

S^3 是 $\mathbb{R}^4$ 中有界集. 从而 SU(2) 是 $\mathbb{R}^4$ 的有界闭集. 根据 [定理 7.3.3,[32]], SU(2) 是紧集. SU(2) 是 Hausdorff 是自然的, 因为 $\mathbb{R}^4$ 是 Hausdorff 的, 其子群 SU(2) 也是. 故 SU(2) 是 Hausdorff 紧群. □

设 V_0 为 SU(2) 在复数域 $\mathbb{C}$ 上平凡表示 π_0 的表示空间. 容易知道 $V_0 \cong \mathbb{C}$.

性质 4.36. *π_0 是一维的不可约表示.*

设 V_1 为 SU(2) 在 $\mathbb{C}^2$ 上关于矩阵乘法的表示空间, 容易知道 $V_1 \cong \mathbb{C}^2$ 即:

$$\pi_1 : \mathrm{SU}(2) \mapsto \mathrm{GL}(V_1)$$
$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \mapsto \pi_1(g) : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$$

[34]称表示是忠实的, 如果表示是单同态.

性质 4.37. π_1 是二维的不可约表示.

证明. SU(2) 对 V_1 的群作用是传递的. 对任意的 $(a,b) \in S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$, a,b 满足 $a\bar{a}+b\bar{b}=1$, 我们有:

$$(a,b) = (1,0)\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

于是, 对任意的 $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, 令 $\lambda = (a\bar{a}+b\bar{b})$ 则:

$$\left(\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right) \in S^3$$

从而存在 $g \in \mathrm{SU}(2)$, 使得 $(a,b) = \lambda\pi(g)((1,0)) = \lambda g.(1,0)$. 于是, $S^3 = \{g.(1,0) \mid g \in \mathrm{SU}(2)\}$. $V_1 = \lambda S^3$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$. 于是, π_1 是二维不可约表示. □

下面, 我们讨论 SU(2) 的高维不可约表示. 设 V_n 为复数域上次数为 n 的二元齐次多项式关于多项式加法和数乘构成的复数域上的线性空间. 即:

$$V_n = \{f(z_1,z_2) \in \mathbb{C}[z_1,z_2] \mid \deg(f) = n, f(z_1,z_2)\text{是齐次多项式}\}$$

容易知道, $\{P_k(z_1,z_2) = z_1^k z_2^{n-k}\}_{k=0}^n$ 是 V_n 的一组基. $\dim(V_n) = n+1$. 现考虑 SU(2) 在 V_n 上的左乘表示.

$$\begin{aligned} \pi_n : \mathrm{SU}(2) &\mapsto \mathcal{L}(V_n) \\ g &\mapsto \pi_n(g) : P(z) \mapsto (gP)(z) = P(zg) \end{aligned}$$

其中, $P(z) \in \mathbb{C}[z_1,z_2]$, $z = (z_1,z_2)$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, 且有

$$zg = (z_1,z_2)\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = (az_1 - \bar{b}z_2, bz_1 + \bar{a}z_2)$$

性质 4.38. π_n 是 SU(2) 的一个有限维酉表示.

证明. π_n 是一个良定义的. 换句话说, 对任意的 $P_k(z_1,z_2) = z_1^k z_2^{n-k} \in V_n$, $\pi_n(g)$ 是齐次线性映射:

$$\pi_n(g)(P_k(z)) = P_k(zg) = (az_1 - \bar{b}z_2)^k (bz_1 + \bar{a}z_2)^{n-k} \in V_n$$

π_n 是一个群同态. 对任意的 $g_1, g_2 \in \mathrm{SU}(2)$, 任意的 $P(z) \in V_n$, 成立:

$$\pi_n(g_1g_2)(P(z)) = P(zg_1g_2) = \pi_n(g_2)(P(zg_1)) = \pi_n(g_1)\pi_n(g_2)(P(z))$$

即 $\pi_n(g_1g_2) = \pi_n(g_1)\pi_n(g_2)$. 于是, V_n 为 $\mathbb{C}[z_1,z_2]$ 的 SU(2)-不变子空间. □

性质 4.39. *表示 π_n 是 n 维不可约表示, V_n 是不可约 SU(2)-不变空间.*

证明. 我们只需要证明如下断言, 对 V_n 关于表示 π_n 的任意线性缠结映射 $\mathcal{A}: V_n \mapsto V_n$, $\mathcal{A}$ 是一个数乘变换. 这是因为, SU(2) 是 Haudorff 紧群, 根据性质(4.16), 如果 π_n 是可约的, 则存在 V_n 的非平凡 SU(2)-不变子空间 W_n 和 W_n', 使得 V_n 有如下直和分解:

$$V_n = W_n \oplus W_n'$$

考虑 V_n 关于子空间 W_n 的投影映射 $\mathcal{P}$ 如下,

$$\mathcal{P}: V_n \mapsto V_n$$
$$v = w_n + w_n' \mapsto \mathcal{P}(v) = w_n$$

我们有 $\ker(\mathcal{P}) = W_n'$. 且 P 是线性缠结映射. 即对任意的 $g \in \mathrm{SU}(2)$, 成立:

$$\pi_n(g) \circ \mathcal{P}(v) = \pi_n(g)(w_n) = \mathcal{P}(\pi_n(g)(w_n) = \mathcal{P}(\pi_n(g)(w_n + \pi_n(g)(w_n')) = \mathcal{P}(\pi_n(g)(v))$$

于是, $\pi_n(g) \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ \pi_n(g)$. 如果上述断言成立, 则 $\mathcal{P}$ 是一个数乘变换, 从而 $\ker(\mathcal{P}) = W_n' = V_n$. 这与表示 π_n 的可约性矛盾. 下面, 我们证明上述断言. 设 $\mathcal{A}: V_n \mapsto V_n$ 是任意的线性缠结映射, 取 $a \in \mathbb{C}$, 满足 $a\bar{a} = 1$. 令

$$g_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$$

计算得 $g_a P_k = (az_1)^k (a^{-1}z_2)^{n-k} = a^{2k-n} P_k$, 且有:

$$g_a \mathcal{A} P_k = \mathcal{A} g_a P_k = \mathcal{A} a^{2k-n} P_k = a^{2k-n} \mathcal{A} P_k$$

特别的, 我们选择上述 a, 使得 $a^{2k-n}(0 \leqslant k \leqslant n)$ 是互不相同的. 注意到, $\dim(V_n) = n+1$, 故 $\pi_n(g_a)$ 关于特征值为 a^{2k-n} 的特征子空间是一维的. 因此, 存在 $c_k \in \mathbb{C}$, 使得 $\mathcal{A} P_k = c_k P_k$. 考虑 SU(2) 中的实旋转:

$$r_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$$

计算如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} r_t P_n &= \mathcal{A}(z_1 \cos t + z_2 \sin t)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k t \cdot \sin^{n-k} t \cdot \mathcal{A} P_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k t \cdot \sin^{n-k} t \cdot c_k P_k \end{aligned}$$

类似的, 计算:

$$\begin{aligned} r_t\mathcal{A}P_n &= r_t c_n P_n \\ &= c_n r_t P_n \\ &= c_n(z_1\cos t + z_2 \sin t)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k t\cdot\sin^{n-k} t\cdot c_n P_k \end{aligned}$$

因为 $r_t\mathcal{A} = \mathcal{A}r_t$, 上述两等式相等, 对比其系数, 可知 $c_n = c_k$, 于是 $\mathcal{A} = c_n \cdot id$, 即证断言. □

根据 [定理 3.1,[33]], 对任意的 $g \in \mathrm{SU}(2)$, g 在复数域 $\mathbb{C}$ 上相似于一个对角矩阵. 计算 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$ 的特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha + \bar{\alpha})\lambda + 1 = \lambda^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\lambda + 1$, 设 $\mathrm{Re}(\alpha) = \cos t$, 则 $\lambda_1 = \exp(it), \lambda_2 = \exp(-it)$. 于是, g 相似与 $e(t)$ 相似. 其中,

$$e(t) = \begin{pmatrix} \exp(it) & 0 \\ 0 & \exp(-it) \end{pmatrix}$$

$e(t)$ 和 $e(s)$ 相似, 当且仅当 $s \equiv \pm t \mod 2\pi$.

设 $\mathcal{F} = \{f : \mathrm{SU}(2) \mapsto \mathbb{C} \mid f\text{连续, 且对任意的}x, g \in \mathrm{SU}(2), \text{成立} f(gxg^{-1}) = f(x)\}$ 为 SU(2) 上的类函数 [35]. 关于 SU(2) 上的类函数, 下面性质是容易验证的.

性质 4.40. 对任意的 $f \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} f\circ e : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{C} \\ t &\mapsto f(e(t)) \end{aligned}$$

$f \circ e$ 是周期为 π 的函数.

性质 4.41. 不可约 π_n 的特征标 χ_n 在 $e(t)$ 取值为 $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{i(n-2k)t}$. 从而, $\{\chi_n\}$ 在 $\mathcal{F}$ 中是一致稠密 [36]的.

证明. 首先考虑表示 π_n 在 $e(t)$ 处对应的线性变换. 注意到,

$$\pi_n(e_t)(P_k) = (z_1\exp(it))^k(z_2\exp(-it))^{n-k} = \exp((2k-n)it)P_k$$

[35] 有限群表示中共轭类和类函数起着很重要的作用, 可参考书籍 [C.2-7,[10]].

[36] 此处的一致稠密, 是指对 $\mathcal{F}$ 中的每个函数 f, 存在序列 $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的函数列, 使得其极限函数为 f.

于是, 特征标 χ_n 在 $e(t)$ 处的取值为:

$$\begin{aligned}\chi_n(e(t)) = \mathrm{tr}(\pi_n(e(t))) &= \sum_{k=0}^{n} \exp(i(2k-n))t \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{i(n-2k)t} \\ &= \begin{cases} \cos(nk\pi) & ,t = k\pi \\ \frac{\sin(n+1)t}{\sin(t)} & ,t \neq k\pi \end{cases}\end{aligned}$$

令 $\kappa_n(t) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin(t)}$, 则根据三角函数公式 $\sin(n+1)t = \sin(nt)\cos(t) + \cos(nt)\sin(t)$, 我们有 $\{\kappa_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的递推公式:

$$\kappa_n(t) = \cos(nt) + \kappa_{n-1}\cos(t)$$

所以, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n$ 生成的复线性空间与 $\{1, \cos(t), \cdots, \cos(nt)\}$ 生成的复线性空间一致. 故 $\{\kappa_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 生成的复线性空间与 $\{\cos(nt)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 生成的复线性空间是一致的. 根据 [Weierstrass 第二逼近定理定理 16.3.6,[37]], $\{\cos(nt)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在周期为 2π 的连续复值偶函数空间中是一致稠密的. 从而, $\{\kappa_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在周期为 2π 的连续复值偶函数空间中也是一致稠密的. 故特征标 $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{F}$ 内一致稠密. □

下面, 我们对 SU(2) 上的类函数在 SU(2) 上的 Haar 积分给出一个计算结果.

性质 4.42. *f 是 SU(2) 上连续的类函数, 则:*

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f \circ e(t)\sin^2(t)dt$$

证明. 根据性质(4.41), 我们存在 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, 使得 $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\chi_n$. π_n 是不可约表示, 根据其特征标的 Schur 正交关系(4.26), 我们有:

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} \chi_n(k)d(u(k)) = \begin{cases} 1 & ,n = 0 \\ 0 & ,n > 0 \end{cases}$$

我们计算等式左边如下:

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{SU}(2)} f(x)dx &= \int_{\mathrm{SU}(2)} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\chi_n(x)d(u(x)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \int_{\mathrm{SU}(2)} \chi_n(x)d(u(x)) \\ &= a_0\end{aligned}$$

在性质(4.41)证明中, 注意到 $\chi_n(e(t))\sin^2(t) = \sin((n+1)t)\sin(t)$, 我们计算等式右边

如下:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f\circ e(t)\sin^2(t)dt &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\chi_n\circ e(t)\sin^2(t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\int_0^\pi \chi_n\circ e(t)\sin^2(t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\int_0^\pi \sin((n+1)t)\sin(t)dt \\
&= a_0
\end{aligned}$$

于是, 上述等式成立. □

定理 4.43. *对 SU(2) 的任意一个不可约酉表示 ρ, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 π_n 与表示 ρ 等价.*

证明. 设 $\rho : \mathrm{SU}(2)\mapsto \mathrm{GL}(W)$ 是 SU(2) 的一个不可约表示, 使得对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 表示 ρ 与 π_n 不等价. 对表示 ρ 的特征标 $\chi_\rho\in\mathcal{F}$, 根据性质(4.41), 存在 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{C}$, 使得 $\chi_\rho=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\chi_n$. 根据特征标的正交关系(4.26), 我们有 $(\chi_\rho,\chi_n)=0, (\chi_\rho,\chi_\rho)=1$. 于是,

$$(\chi_\rho,\chi_\rho)=(\chi_\rho,\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n\chi_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(\chi_\rho,\chi_n)=0$$

从而矛盾. 故对 SU(2) 的任意一个不可约酉表示 ρ, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 π_n 与表示 ρ 等价. □

至此, 我们找出了 SU(2) 在复数域上的有限维不可约表示的分类. 根据 Hausdorff 紧群的性质(4.11), Hausdorff 紧群 SU(2) 的酉表示都是有限维表示的直和. 根据性质(4.16), SU(2) 上的有限维酉表示都是完全可约的. 于是, 我们完成了 SU(2) 酉表示的研究.

事实上, SU(2) 是一个紧致李群. 对 SU(2) 的研究, 我们可从李代数出发进行研究. 我们做 SU(2) 的切空间得到李代数 $\mathfrak{su}(2)$. SU(2) 作为李群是同构于 S^3 的, 从而是单连通的. 因此, 根据李理论中的相关结果, 李群 SU(2) 的表示与李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 是一一对应的. 对于李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 的表示, 我们可以类似 $\mathfrak{sl}(2)$ 的表示 [37] , 利用权向量和根空间分解来构造 $\mathfrak{su}(2)$ 的表示.

另外, SU(2) 和 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 具有相同的复化, 从而有相同的表示. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的表示的研究也可通过上述李代数办法进行讨论.

最后, 我们谈谈 SU(2), SU(3), SO(3) 在物理中的应用, 特别是在粒子物理中. 这主要涉及两个方面, 一方面它是旋转群 SO(3) 的自旋双覆盖. 其中, SU(2) 和 SU(3) 用于描述和计算内旋, SO(3) 用于计算外旋. 另一方面它们反映了粒子的 “内部” 对称结构, 并推广了电荷的概念.

作为本文的结束, 我们提出以下展望:

[37]可参考书籍 [6;7 小节,[5]].

(a) 当群结构和拓扑结构相容时, 我们得到具有齐性的拓扑群. 拓扑结构是一种较为底层的数学结构, 一方面可以赋予度量结构, 这在本文讨论紧 Hausdorff 拓扑群中起到很大帮助; 另一方面, 我们可以赋予微分结构, 使得微分结构与拓扑结构相容, 这便是微分流形[38]. 当我们在拓扑群上赋予微分结构, 使得群运算、拓扑结构与微分结构相容时, 我们得到的对象称为李群. 李群是最重要的一类拓扑群, 几乎在物理、生物、化学应用中涉及到的拓扑群都是李群. 在本文绪论中提到的 Hilbert 第五问题(1.1)的结果之一是: 所有的局部 Euclid 的连通[39]拓扑群都同构于某个李群. 李群上具有丰富的结构, 它同时具有代数的群结构, 也具有微分流形的几何结构. 最简单的李群是实数关于通常拓扑和微分运算下的加法群 $\mathbb{R}$. 李群的书籍可参考 [4] 和 [2],

(b) 在微分流形上, 对流形上的每一点, 我们可以在该点线性近似. 这便是作切空间[40]. 对于一个李群 G, 得益于其齐性, 每一点的切空间是同构的. 故我们只需要对李群 G 在单位元 e 处考虑切空间即可. 我们在 G 的单位元 e 处可得到切空间 G_e. 线性空间 G_e 上具有一个很好的代数结构, 称为李代数, 它是一类经典的非结合代数[41]. 李代数的结构及其表示的研究可参考书籍 [5] 和 [11], 其中最经典的结果是复半单李代数的分类和 SL_2 的表示. 与有限维结合代数表示论不同, 非结合代数 (以李代数为代表) 在研究方法上有很大区别. 有限群和紧群的表示中, 特征标理论可以解决复表示和酉表示; 而在李代数的表示中, 特征标起不到实质性作用. 李代数的表示和有限维代数表示有美妙的交叉地段: Dyken 图和 Auslander—Reitner 正合列, 甚至从代数表示论出发, 我们不需要大量的计算就可以得到李代数的根系. 相关书籍可参考 [6]. 与李代数表示相关的, 量子群可阅读 [7], 顶点算子代数可阅读 [14].

(c) 紧李群的表示论已经是成熟的工作, 可参考书籍 [18], 但在数论研究中涉及到的特殊紧李群的表示结构和分类是不容易完成的工作, 针对紧李群 $\mathrm{GL}(N)$ 可阅读 [3].

(d) 非紧李群的表示最少可分为两类. 第一类是实半单李群的无穷维酉表示, 例如 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 是实李群. 第二类是 P-进李群的表示, 比如 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$[42].

 (1) 实半单李群的无穷维酉表示的基本工作几乎是 Harish Chandra 一个人做的. 他是确定离散表示的第一人. Harish Chandra 之后的还有一些著名的工作. 例如 Gelfand 发展出一套 BGG 范畴, 它在半单李代数的表示中非常有用, 可参考文献 [8]; 京都大学的 Kashiwara 和哈佛大学的 W.Schmid 用微分方程代数方法—D 模理论重建 Harish Chandra 的成果, 可参考 [21]. 按照实李群的分类, 除了半单李群外还有可解李群和幂零李群, 这两方面已有成熟的结果.

[38] 微分流形的相关书籍可参考 [26], [2].
[39] 连通, 局部 Euclid 等拓扑概念可参考 [Appendix,[26]].
[40] 对于微分流形的切空间的详细定义, 可参考书籍 [26].
[41] 结合律在代数中往往是最本质的, 其他的非结合代数, 例如顶点算子代数, Jordan 代数, 它们在量子场论中有重要作用.
[42] $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 可参考 [20].

(2) p-进李群 G 在无穷维空间 V 上的表示. 特别的, V 通常是完备域 F [43] 上的 Banach 空间. 当 F 是复数域时, G 是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的既约代数群的有理点. 这类 p-进李群的表示分类, L-packet 的结构、表示类的几何结构 (ABP 猜想) 以及局部朗兰兹对应 (Local Langlands Correspondence) 是目前活跃的领域. 当 F 是 p-进数域时, G 是 p-进李群, 研究其在 $\mathbb{Q}_p$ 上的的 Banach 空间 V 的表示. 这是目前的新研究方向, 主要源于 p-进局部朗兰兹对应 (p-adic LLC) 和非交换岩泽理论 (noncommutative Iwasawa theory). 德国 Muenster 大学的 Peter Schneider 和美国的 Chicago 大学的 Mathew Emerton 目前是这个方向表示论的领军人物.

[43] 完备域是指所有可分扩张都是代数扩张的域. 有限域都是完备域. [17].

结　　论

本文主要介绍了紧群的表示理论, 详细讨论了紧群的酉表示, 并阐述了该领域中非常重要的两个结果: Schur 正交关系和 Peter-Weyl 定理. 最后, 作为例子, 本文构造并计算出了紧群 SU(2) 的所有不可约酉表示, 针对 SU(2) 验证了 Peter-Weyl 定理的正确性.

本文从基本的群论和拓扑学出发, 首先介绍了拓扑群的基本概念和其所具有的齐性, 给出了一些拓扑群的实例; 然后, 对局部紧 Hausdorff 拓扑群建立了著名的 Haar 测度, 并给出了 Haar 测度存在性的证明. 得益于 Haar 测度, 我们可以借助分析学上的工具开展拓扑群表示的研究. 对具有紧性的拓扑群, 我们指出其上的 Haar 测度具有双不变性. 基于这一性质, 本文着重讨论了紧群的酉表示, 陈述了 Schur 正交关系和 Peter-Weyl 定理, 将通常的 Fourier 分析推广到了紧 Hausdorff 非交换群的情形. 最后, 本文借助这些结论, 找出了 SU(2) 的所有不可约酉表示; 同时也进一步佐证了 Peter-Weyl 定理的正确性.

本文的创新点主要在于: 1. 不同于一般抽象测度论中在集合层面上构造 Haar 测度, 本文从表示论的观点出发, 通过在函数层面上直接构造 Haar 积分来讨论 Haar 测度的存在性. 同时, 我们也指出, 本文的构造方法本质上和抽象测度论中的办法是一致的, 它们可以通过著名的 Riezs 表示定理联系起来. 2. 本文将有限群常表示论中的特征标正交关系推广到了紧群表示论中, 这是本文中的 Schur 正交关系. 它们都完美的解决了复数域上不可约酉表示的问题. 3. 本文将实分析中的经典 Fourier 分析, 推广到了局部紧非交换群的情形, 得到了相应的 Fourier 展开和著名的 Plancherel 公式; 这是本文中的 Peter-Weyl 定理. 为抽象调和分析和 Fourier 分析提供了一个典范. 4. 本文计算了 SU(2) 的所有不可约表示, 并对其验证了 Peter-Weyl 定理的正确性.

近年来, 数论、代数几何、量子力学和结构化学等学科的迅猛发展, 都离不开表示论这一重要的工具. 在这些学科中, 涉及到的绝大多数拓扑群都是李群. 本文用于研究紧群表示的方法, 可以完全适用在紧致李群的表示研究中, 为紧致的李群研究打下了基本框架. 紧李群的表示已是较为成熟的工作, 而非紧群的表示是目前研究的热点. 它在李代数、量子群、顶点算子代数、微分方程及数论中的 Langlands 纲领和 Iwasawa 理论等领域广泛涉及.

在本论文所研究的紧群表示论基础上, 可以进一步学习和研究的地方在于: 1. 可以将微分结构引入到拓扑群中, 进一步深入学习李群及其表示论, 其上有丰富的几何、分析和代数结构. 李群的表示的研究, 可以与其局部线性近似—李代数的表示相联系, 讨论它们表示之间的对应关系. 此外, 李群和李代数在数论、自守表示和量子力学中也是十分重要的对象. 2. 可以涉足分析学中的几何测度论和调和分析等学科, 可进一步讨论 Haar 测度在抽象调和分析和偏微分方程中的应用, 深刻体会分析学所提供的强大有力的工具. 3. 从拓扑群和紧群出发, 还可以研究 K 理论, 这是现在活跃的领域, 它和非交换几何有关.

致　　谢

黄昏的斜阳照在黑板; 空气中也是一片橘黄. 白色粉笔, 写下了许多故事. 跟往常一样, 我背着书包, 走上分手桥. 晚修的铃打响了最后一遍, 校门外, 是最漫长的夏天.

秋的叶, 冬的雪, 彩虹在天上. 记得四年前的秋天, 我从湘西的苗家边城, 来到西南的天府蓉城. 在国家少数民族加分政策的支持下, 我迈进了历史悠久的西南交通大学. 岁月如梭, 四年的大学本科生涯就要落下帷幕. 时至今日, 当初收到录取通知书时的欣喜仍历历在目, 我也很幸运能够成为了被数学选中的人.

春的花, 夏的雨, 彩虹在天上. 在踏上崭新的旅程前, 在夏意正浓的告别际, 我想向在交大求学路上遇到的每一个老师和朋友道出我最真挚的祝福. 感谢和你们在西南交通大学的相遇, 是你们的帮助和鼓励, 伴我走过了在交大的每一个春夏秋冬.

首先, 要感谢指导我完成毕业设计的杨中维老师. 我和杨老师的相识是在近世代数课上, 也正是受到了杨老师的熏陶和鼓励, 我最后选择了在代数方向继续深耕. 大学的代数课, 大多都是跟杨老师学到的. 杨老师教会了我近世代数、交换代数和李代数. 这些课在大多数高校是听不到, 更开设不起来的. 每次李代数下课后, 我们都会一起去学校的梁园二楼吃饭, 在路上我们也会讨论数学问题. 杨老师总是鼓励我去探索、发掘自己喜欢的方向. 后来, 在杨老师的推荐下, 我参加了厦门大学刘青教授的 Mordell-Weil 短课, 在那里, 我接触到了算术几何, 这也是我研究生将要学习的方向.

在升学事情上, 最要感谢数学系主任刘品教授的推荐和信任. 刘老师在课堂上总是告诉我们, 要从交大走出去, 去看更好的数学. 刘老师得知我未来希望在代数学方向深造后, 便把我推荐到四川大学卢明教授李理论讨论班学习. 这极大的开阔了我的学术视野. 后来, 在刘老师的推荐下, 我先后前往北京师范大学、北京理工大学和华东师范大学参加大学生夏令营, 并且都取得了很好的成绩. 在一次同调代数课后, 刘老师和我一起吃了午饭. 在午饭之间, 他告诉我, 读书的意义在于让自己成为一方面的专家, 其次再是成为数学家. 这也让我在对未来的迷茫和焦虑中再次领悟到读书的意义.

在数学学习上, 要感谢张航老师将我这个数学小白带入到了美妙宏大的数学殿堂. 张老师的数学分析课堂幽默风趣, 让我觉得数学更像是一门语言. 他的课堂教会我怎么去思考问题, 这跟绝大多数应试类课堂不一样. 在交大的四年, 我每年都会去拜访他. 精致的小洋屋里洋溢着生活的幸福和数学的乐趣. 非常感谢师母每次都为我准备美味的饭菜和可口的点心.

在科研道路上, 要感谢李从辉老师对我本科 SRTP 科研项目的指导. 李老师教会了我熟练使用 Latex 软件, 这是数学科研中必备的. 每一次讨论班上, 李老师都会很认真的听我们讲, 并及时解答我们的疑惑. 后来, 在李老师的帮助下, 我申请了南方科技大学数学系, 并最终选择南方科技大学, 继续深造. 此外, 还要感谢跟我一起上代数讨论班的同学, 他们是蔡羽珂, 李文科, 19 级的学长田玉亭和 21 级的学弟胡佩诚以及物理学院的张锦浩. 讨论班在开展过程中遇到过许多困难, 最初大家不会使用 Latex, 也不习惯阅读英文书, 但经过一年以来的学习和交流, 我们在讨论班中不仅学到了优美的数学理论, 更是和彼此建立了深厚的情谊.

大学中给予我帮助的老师还有很多. 感谢张晟老师对我厦门之行的赞助, 很喜欢他的授课风格, 非常酷炫. 感谢代守信老师在代数几何学习上的建议. 感谢班导师余志恒教授在大学四年里对我的教导; 感谢辅导员周睿和吕薇在大学四年里对我的关心.

其次, 要感谢在大学四年里遇到的每一个同学. 在大学里, 我遇到了很好的朋友—赵健. 我们一起上课, 一起吃饭; 一起旅行, 一起锻炼. 赵健比我大一届, 是从心理学专业转到数学专业来的. 他顺利保送上了研究生, 继续在西南交通大学数学学院深造. 在寻找未来学术方向时, 我和刘蘅丰、汪泽鑫三人成团, 不时约饭畅谈. 汪兄去了四川大学跟吕克宁教授直博攻读动力系统; 丰兄留在本校跟唐春明教授攻读组合数学. 我和梁柯健、崔玄, 成团要去游遍四川的大好河山; 和邵鑫相见恨晚, 邵鑫的网球和羽毛球水平一流, 我们常切磋球技. 大学一二年级的时候, 因为学业繁重, 我总在鸿哲斋十栋下的餐车买饭. 打饭的次数多了, 餐车上的阿姨也记得了我. 阿姨很热情, 看见我总笑呵呵的, 她的笑容无数次温暖过我. 和室友于存源, 李春壮和刘向阳, 在同一屋檐之下, 矛盾难免会有, 感谢你们四年来对我的包容. 我的学习搭档闫宇汉, 他总是愿意跟我一起讨论问题, 听我讲题; 他喜欢足球, 带我一起去凤凰山看了场足球赛.

说起科研竞赛, 要感谢李步云和张诗语邀请我参加全国大学生市场调研与分析大赛. 这是我大学为数不多的竞赛. 我们研究的课题是素食自助餐厅, 最终获得了四川省一等奖. 在这场比赛中, 我学会了很多应用统计学和经济学的知识, 也得到了大家的认可. 非常开心能够和你们成为队友, 度过了那么多快乐的时光. 后来, 在李步云的帮助下, 我还顺利通过了教师资格证的考试, 也了解到很多金融业的知识. 在一起的时光, 总是很开心的. 和杨哲先一起参加过数学建模, 我许多编程技能是从他那学到的.

最后, 要感谢我的父母. 我的父母这一生没能上过大学, 他们总希望我能到大学里面去看一看. 大学四年, 感谢父母在生活上对我的资助, 让我没有太多经济方面的压力. 在人生的十字路口, 感谢父母对我的支持和理解, 让我有勇气去面对社会、面对未来.

我喜欢交大的太阳, 我喜欢犀湖的青草; 我喜欢午后的浙亭, 和一旁发呆的秋千. 我喜欢仲夏的豆花, 我喜欢清秋的月饼; 良宵的夜空, 漫天的星辰.

我喜欢放学的铃铛, 我喜欢停电的夜晚; 我喜欢周五的傍晚, 被霞光亲吻的教学楼. 我喜欢成群的野鸭, 我喜欢凌乱的书架, 清风的露台, 远处的灯海.

我喜欢蓉城那尽头远远的青山, 我喜欢热气球飞上西边的天空. 我喜欢清晨的石板路, 雾腾腾的早餐店和阿姨的寒暄. 我喜欢, 每一朵暮云, 每一株绿树.

晚云间的纸风筝, 梦想着星辰. 青空乱流, 是强烈的时代的风. 一定要去到心中向往的地方. 保重, 老师! 谢谢, 同学! 纸短情长, 陪伴是最长情的告白. 深深的话, 也要浅浅的说; 长长的路, 也要慢慢的走.

祝前程似锦, 愿成为最好的我们.

参考文献

[1] Macdonald Atiyah. Introduction to Commutative Algebra. Addison—Wesley Publishing Company, 1969.

[2] F.Warner. Foundations of differential manifolds and Lie groups. Springer, 1983.

[3] C.Bushnell; G.Henniart. Local Langlands conjecture for GL(2). Springer, 2006.

[4] Brian C. Hall. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations; An Elementary Introduction. Springer, 2015.

[5] James E. Humphreys. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer, 1972.

[6] Daniel Simson Ibrahim Assem. Elementary of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1 Techniques of Representation Theory. Cambridge University Press, 2006.

[7] Jens Carsten Jantzen. Lectures on Quantum Groups. American Mathematical Society, 1996.

[8] J.Humphreys. Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category O. American Mathematical Society, 2008.

[9] Joseph J.Rotman. Advanced Modern Algebra, Part 1. American Mathematical Society, 2015.

[10] Joseph J.Rotman. Advanced Modern Algebra, Part 2. American Mathematical Society, 2015.

[11] Mark J. Wildon Karin Erdmann. Introduction to Lie Algebras. Springer, 2010.

[12] Saunders Mac Lane. Categories for the Working Mathematician. Springer, 1997.

[13] Donald L.Cohn. Measure Theory. Birkhauser, 2013.

[14] James Lepowsky; Haisheng Li. Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations. Birkhauser, 2010.

[15] Peter Li. Geometric analysis. Cambridge University Press, 2012.

[16] Luiz A. B. San Martin. Lie Groups. Springer, 2016.

[17] Patrick Morandi. Field and Galois Theory. Springer, 1996.

[18] M.Sepanski. Compact Lie groups. Springer, 2007.

[19] P.Deligne. Categories Tannakiennes; The Grothendieck Festschrift volume 2. Birkhauser, 1990.

[20] P.Schneider. p-Adic Lie Groups. Springer, 2011.

[21] K.Takeuchi. T. Tanisaki R.Hotta. D-modules, perverse sheaves and representation theory. Birkhauser, 2008.

[22] Jean-Pierre Serre. Linear Representations of Finite Groups. Springer, 1977.

[23] John Stillwell. Mathematics and Its History. Springer, 2010.

[24] Terence Tao. Hilbert's Fifth Problem and Related Topics. American Mathematical Society, 2014.

[25] Theodor Brocker; Tammo tom Dieck. Representations of Compact Lie Groups. Springer, 1985.

[26] Loring. Tu. An Introduction to Manifolds. Springer, 2010.

[27] Peter Webb. A Course in Finite Group Representation. Cambridge University Press, 2016.

[28] W.Rudin. Real and complex analysis. McGraw-Hill, 1986.

[29] 丘维声. 高等代数. 清华大学出版社, 2010.

[30] 丘维声. 近世代数. 北京大学出版社, 2015.

[31] 夏道行; 杨亚立. 线性拓扑空间引论. 上海科学技术出版社, 1986.

[32] 熊金城. 点集拓扑讲义. 高等教育出版社, 2011.

[33] 蓝以中. 高等代数简明教程 (下册). 北京大学出版社, 2007.

[34] 黎景辉; 蓝以中. 二阶矩阵群的表示与自守形式. 北京大学出版社, 1990.

[35] 程其襄; 张奠宙; 胡善文; 薛以锋. 实变函数与泛函分析基础 (第四版). 高等教育出版社, 2019.

[36] 黎景辉; 陈志杰; 赵春来. 代数群引论. 科学出版社, 2006.

[37] 金路陈纪修, 於崇华. 数学分析 (第三版) 下册. 高等教育出版社, 2018.

[38] 黎景辉; 冯绪宁. 拓扑群引论. 科学出版社, 2013.